

## 1.6. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОЦЕНКИ РИСКОВ НЕГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕНСИОННОГО ФОНДА

Яркова О.Н.<sup>1</sup>, Чудинова О.С.<sup>2</sup>, Раменская А.В.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>СПбГАСУ, Санкт-Петербург

<sup>2</sup>ОГУ, Оренбург

*Работа посвящена разработке математических моделей и инструментального средства для анализа актуарных и финансовых рисков негосударственных пенсионных фондов (НПФ) по негосударственному пенсионному обеспечению с учетом стохастической изменчивости численности и половозрастной структуры участников. Предложена авторская математическая модель для оценки динамики финансовых резервов негосударственных пенсионных фондов по негосударственному пенсионному обеспечению, позволяющая учесть стохастическую природу поступления и оттока средств, колебания численности и половозрастной структуры участников пенсионной программы. Проведена апробация модели с использованием разработанного инструментального средства поддержки принятия решений. Предложенный инструментальный позволяет оценить показатели финансовой надежности негосударственных пенсионных фондов в среднесрочной и долгосрочной перспективе.*

### Введение

В условиях современной экономики России важное социальное значение имеет развитие системы негосударственного пенсионного страхования. Страхованием по программам негосударственного пенсионного обеспечения (НПО) занимаются негосударственные пенсионные фонды (НПФ), от стабильности функционирования которых зависят качество и эффективность финансовой поддержки граждан при выходе на пенсию. Как следствие, вопросы обеспечения финансовой надежности НПФ, под которой понимается достаточность резервов для выполнения обязательств перед клиентами, имеют важное значение как для участников программ негосударственного пенсионного страхования, так и для управляющего звена финансовой организации. Финансовые резервы НПФ, формируемые за счет взносов участников пенсионных программ, аккумулируются на длительные сроки. Обладая долгосрочными денежными средствами, пенсионные фонды инвестируют средства через управляющие компании и разрешенные финансовые инструменты, сохраняя и приумножая финансовые резервы и накопления вкладчиков. На размеры взносов вкладчиков и, соответственно, пенсионных накоплений влияет срок формирования накоплений, т.е. период до выхода на пенсию, который зависит от половозрастных характеристик участника негосударственной пенсионной программы. При этом, период накопления может быть прерван, например, при получении инвалидности или смерти участника. В указанных случаях выплатной период начинается досрочно, что необходимо учитывать при оценке динамики финансовых резервов НПФ. Таким образом, на финансовую надежность негосударственного пенсионного фонда существенное влияние оказывают актуарные риски и инвестиционная политика организации.

Исследованию вопросов эффективности деятельности пенсионной системы России и негосударственных пенсионных фондов посвящено множество научных публикаций [Волкова, 2019; Горовец, 2018; Лавренова, 2016; Помазкин, 2018; Хмелевская, Есаулкова, 2021; Швандер, Анисимова, 2021; Юрьева и др., 2017; Monograph, 2017; Sabitova at all., 2015]. Горовец Н.А. [Горовец, 2018] анализирует пенсионные резервы и структуру инвестиционного портфеля пенсионных резервов крупных НПФ России. Юрьева И.А. [Юрьева и др., 2017] анализирует влияние пенсионных реформ на развитие НПФ. Юрьева И.А. [Юрьева и др., 2017], как и Волкова Т.Г. [Волкова, 2019], отмечают, что пенсионные резервы растут медленными темпами и, в основном, за счет средств обязательного пенсионного страхования, а не за счет негосударственного пенсионного обеспечения. Причинами этого, по мнению авторов, являются низкие доходы граждан, что подтверждается исследованиями [Христолюбова, 2019; Chudinova at all, 2020], и низкий уровень культуры планирования пенсий. В коллективной монографии [Monograph, 2017] проведен анализ общественного мнения и отношения работодателей к факторам, влияющим на развитие системы негосударственного пенсионного страхования. Лавренова Е.С. [Лавренова, 2016] проводит сравнение пенсионных резервов и пенсионных накоплений, исследует динамику количества НПФ в России, отмечает необходимость стимулирования граждан для участия в негосударственном пенсионном страховании. Однако в приведенных работах деятельность НПФ рассматривается с позиций пенсионной системы в целом и не анализируются риски конкретной организации.

Вопросам математического моделирования пенсионных резервов, в том числе, в условиях инвестирования, посвящены работы Alonso-García J., Bédard D., Cairns A.J.G., Devolder P., Dufresne D., MacDonald B.J. [Alonso-García, Devolder, 2015; Bédard, Dufresne, 2001; Devolder at all 2003; MacDonald, Cairns, 2011]. Зачастую, при моделировании финансовых средств пенсионных фондов в условиях инвестирования используются марковские модели диффузионного типа и модели оптимального управления, при этом накладываются достаточно жесткие ограничения на параметры моделей. К примеру, цены рисков активов должны удовлетворять стохастической модели Блэка-Шоулза, стохастические компоненты описываются винеровским процессом, вводятся существенные ограничения на законы распределения параметров моделей.

Менее требовательным к параметрам, включаемым в модель, является метод имитационного моделирования, который предлагается использовать в настоящей работе. Вопросами применения методов имитационного моделирования для решения задач в сфере страхования и пенсионного обеспечения занимался Daykin C.D. [Daykin at all, 1993]. Лычкина Н.Н., Морозова Ю.А. [Лычкина, 2013; Лычкина, Морозова, 2011] применяли методы имитационного моделирования для исследований в рамках государственной пенсионной системы, принципы функционирования которой существенно отличаются от деятельности НПФ. Шоломицкий А.Г. [Шоломицкий, 2005] предложил имитационную модель оценки денежных потоков для условной пенсионной программы. Однако предложенная модель мало пригодна для оценки деятельности НПФ на практике, так как не позволяет учесть сочетание различных видов пенсионных схем, реализуемых негосударственными пенсионными фондами, предусматривает выход индивида из программы пенсионного страхования только по причине смерти, выход на пенсию предусмотрен только по достижении пенсионного возраста, не учитываются различия в возрасте выхода на пенсию мужчин и женщин, предусмотрено только безрисковое инвестирование.

Отметим, что при моделировании пенсионных резервов, оценке актуарных рисков НПФ в среднесрочной и долгосрочной перспективе следует учитывать половозрастные характеристики участников программ пенсионного страхования, которые оказывают значимое влияние на пополнение и расходование резервного фонда [Яркова, 2019].

Вопросам исследования демографических процессов (рождаемости, смертности, динамики половозрастной структуры населения) методами статистического и имитационного моделирования посвящены публикации Макарова В.Л. [Макаров и др., 2015], Antonczyk D.[Antonczyk at all, 2020], Kuang By D.[Kuang at all, 2008], Silverman E. [Silverman at all, 2013]. Отметим, что для процесса рождаемости характерно вхождение индивидов в систему в момент рождения, что несправедливо при моделировании процессов пенсионного страхования. В работе Ярковой О.Н. [Яркова, 2019] предложена модель динамики половозрастной структуры участников пенсионных программ НПФ, но не учитывается ее влияние на финансовые аспекты деятельности НПФ.

Анализ работ в области оценки и моделирования финансовых и актуарных рисков негосударственных пенсионных фондов позволяет сделать вывод о недостаточном внимании авторов научных работ к практическим аспектам оценки и моделирования финансовой надежности НПФ, обусловленным стохастической природой поступления и оттока денежных средств, колебаниями численности и половозрастной структуры участников пенсионных программ, вариацией доходностей финансовых инструментов.

### 1. Цель и задачи исследования

Цель исследования: разработка математических моделей и инструментального средства для анализа актуарных и финансовых рисков НПФ по НПО с учетом динамики и стохастической изменчивости численности и половозрастной структуры участников.

Объект исследования: негосударственные пенсионные фонды.

Предмет исследования: модели оценки риска НПФ по НПО.

Задачи исследования:

- разработать имитационную модель для оценки динамики финансовых резервов НПФ по НПО на основе модели динамики половозрастной структуры участников НПО;
- предложить инструментарий оценки финансовых рисков НПФ по НПО с учетом стохастической природы поступления и оттока финансовых средств, изменчивости численности и половозрастной структуры участников;
- провести апробацию предложенного инструментария.

### 2. Методика исследования

Для участников схемы НПО определены зависимости, представленные в работе [Яркова, 2019], отражающие динамику численности участников соответствующего пола и возраста. В соответствии с приведенной моделью количество активных участников НПО возраста  $x$  пола  $g$  в год  $t+1$  формируется из участников, составляющих возрастную группу  $x-1$  в предыдущий год, новых участников соответствующей половозрастной группы, заключивших договор с фондом, за вычетом расторгнувших договор, умерших в течение года и перешедших в категорию пенсионеров.

Количество пенсионеров в момент времени  $t+1$  складывается из количества пенсионеров в предшествующий период, участников перешедших в группу пенсионеров по возрасту и другим причинам, например по инвалидности, за вычетом умерших участников и участников, чьи срочные договора завершились.

Для оценки динамики численности участников НПО используются зависимости, представленные в работе [Яркова, 2019]:

$$M_{t+1}^{CNSPV}(x, g) = M_t^{CNSPV}(x-1, g) + M_t^{newNSPV}(x, g) - N_t^{TNSPV}(x, g) - N_t^{DpNSPV}(x, g) - N_t^{disNSPV}(x, g), \quad (1)$$

$$t = 0, 1 \dots T-1, \quad x = x^{inNSPV}, x^{inNSPV} + 1, \dots x^{PenIn}, \quad g = \{0, 1\},$$

$$M_t^{CNSPV}(x^{inNSPV}-1, g) = 0, \quad M_0^{CNSPV}(x, g) = M^{CNSPV}(x, g),$$

$$N_t^{disNSPV}(x, g) = H(M_t^{CNSPV}(x, g)), \quad N_t^{DpNSPV}(x, g) = F1(M_t^{CNSPV}(x, g), q_x^g),$$

$$x^{PenIn} = \begin{cases} K1, & \text{если } g = 1, \\ K2, & \text{если } g = 0, \end{cases} \quad g = \begin{cases} 1, & \text{если участник женского пола,} \\ 0, & \text{если участник мужского пола,} \end{cases}$$

где  $T$  – период моделирования, лет;

$x$  – величина, характеризующая возраст участника;  $g$  – признак, характеризующий пол участника;

$M_t^{CNSPV}(x, g)$  – количество активных участников возраста  $x$  пола  $g$ , имеющих договор НПО с Фондом в момент времени  $t$ ;

$N_t^{DpNSPV}(x, g)$  – количество умерших среди активных участников НПО возраста  $x$  пола  $g$  в момент времени  $t$ ;

$N_t^{TNSPV}(x, g)$  – количество активных участников возраста  $x$  пола  $g$ , расторгнувших договор НПО в момент времени  $t$ ;

$M_t^{newNSPV}(x, g)$  – количество активных участников возраста  $x$  пола  $g$ , заключивших договор НПО в момент времени  $t$ ;

$N_t^{disNSPV}(x, g)$  – количество участников возраста  $x$  пола  $g$ , перешедших в категорию пенсионеров по причинам, не связанным с достижением пенсионного возраста;

$x^{inNSPV}$  – возраст входа участников в программы НПО;  $x^{PenIn}$  – возраст выхода участников на пенсию по возрасту, равен  $K1$  лет для мужчин и  $K2$  лет для женщин;

$F1(Q(x, g), q_x^g)$  – случайная функция, описывающая количество смертей среди  $Q$  активных участников возраста  $x$  пола  $g$ , моделируются с использованием таблиц смертности;

$q_x^g$  – вероятность смерти участника возраста  $x$  пола  $g$ , определяемая по данным таблицы смертности;

$H(Q(x, g))$  – случайная функция, задающая количество участников среди  $Q$  активных участников возраста  $x$  пола  $g$ , перешедших в категорию пенсионеров по причинам, не связанным с достижением пенсионного возраста.

Опишем структуру движения денежных средств НПФ. Увеличение финансовых резервов по НПО происходит за счет поступления взносов по НПО и доходов от инвестирования. Отток происходит за счет: выплат негосударственной пенсии, которые могут быть срочными или пожизненными, в зависимости от условий конкретного договора; выплат правопреемникам (наследникам) выкупных сумм, в случае смерти активных участников пенсионных схем или в рамках неоконченных срочных договоров пенсионеров, в случаях, когда наследование выкупных сумм предусмотрено условиями договора; выплат выкупных сумм по договорам НПО в случае их расторжения.

Таким образом, динамика резервов НПФ по НПО определяется накопленными финансовыми средствами за предшествующий период и зависит от инфляции и доходности финансовых инструментов. С учетом представленных потоков модель динамики активов НПФ по НПО имеет вид (2).

$$\begin{aligned}
 Y_t = & \frac{Y_{t-1}(1 + \alpha_0 r + \mu_t)}{1 + d} + \sum_{\forall x, \forall g} M_t^{CNSPV}(x, g) \sum_{i=1}^{M_t^{CNSPV}(x, g)} CNSPV(x, g)_t^i \\
 & + \sum_{\forall x, \forall g} M_t^{newNSPV}(x, g) \sum_{i=1}^{M_t^{newNSPV}(x, g)} FirstNSPV(x, g)_t^i - \sum_{\forall x, \forall g} N_t^{DpNSPV}(x, g) \sum_{i=1}^{N_t^{DpNSPV}(x, g)} DpNSPV(x, g)_t^i \\
 & - \sum_{\forall x, \forall g} N_t^{TNSPV}(x, g) \sum_{i=1}^{N_t^{TNSPV}(x, g)} TNSPV(x, g)_t^i - \sum_{i=1}^{N_t^{PBNSPV}} PBNSPV_t^i - \sum_{i=1}^{N_t^{penDpNSPV}} penDpNSPV_t^i,
 \end{aligned} \tag{2}$$

$$\sum_{j=0}^n \alpha_j = 1, \quad \alpha_j = 0, \quad j = 0, 1 \dots n,$$

где  $Y_t$  – объем финансовых резервов НПФ в момент времени  $t$ ;

$u$  – объем финансовых резервов компании в начальный момент времени периода моделирования;

$r$  – ставка наращивания по безрисковым финансовым инструментам;

$d$  – ставка дисконтирования, характеризующая уровень инфляции;

$\alpha_0$  – доля безрисковых финансовых инструментов в инвестиционном портфеле;

$\mu_t$  – доходность рискованных финансовых инструментов в момент времени  $t$ ;

$CNSPV(x, g)_t^i$  – размеры поступающих взносов по НПО участников возраста  $x$  пола  $g$  в момент времени  $t$  ( $i = 1, 2 \dots M_t^{CNSPV}(x, g)$ );

$PBNSPV_t^i$  – размеры выплат негосударственной пенсии в момент времени  $t$  ( $i = 1, 2 \dots N_t^{PBNSPV}$ );

$DpNSPV(x, g)_t^i$  – размеры выплат выкупных сумм наследникам активных участников возраста  $x$  пола  $g$  схемы НПО в момент времени  $t$  ( $i = 1, 2 \dots N_t^{DpNSPV}$ );

$penDpNSPV_t^i$  – размеры выплат наследникам пенсионеров, участников схемы НПО в момент времени  $t$  ( $i = 1, 2 \dots N_t^{penDpNSPV}$ );

$TNSPV(x, g)_t^i$  – размеры выплат участникам возраста  $x$  пола  $g$ , расторгнувшим договора НПФ с Фондом в момент времени  $t$  ( $i = 1, 2 \dots N_t^{TNSPV}(x, g)$ );

$FirstNSPV(x, g)_t^i$  – размеры первого взноса, вносимого новым активным участником (возраста  $x$  пола  $g$ ) программ НПФ при заключении договора ( $i = 1, 2 \dots M_t^{newNSPV}(x, g)$ ).

Доходности рискованных активов (или индексы роста цен активов) в предлагаемой модели оценки динамики финансовых резервов могут быть представлены временными рядами. Модель доходности рискованных активов, учитываемая при моделировании пенсионных резервов, основанная на моделях скользящего среднего, приведена ниже [Яркова, Чудинова, 2021]:

$$\mu_t = \sum_{i=1}^{n1} a_i \omega_t^i + \sum_{i=n1+1}^{n2} a_i (\exp(\omega_t^i) - 1) + \sum_{i=n2+1}^{n3} a_i (G_A^i(t) + TA_t^i) + \sum_{i=n3+1}^n a_i (\exp(G_{AL}^i(t) + TAL_t^i) - 1), \quad (3)$$

где  $G_A^i(t)$  – тренд  $i$ -го временного ряда доходностей рискованных активов, выделенный с учетом условия стационарности остатков  $TA_t^i$ , ( $i = n2 + 1, n2 + 2 \dots n3$ );

$G_{AL}^i(t)$  – тренд  $i$ -го временного ряда логарифмов роста цен рискованных активов, выделенный с учетом условия стационарности остатков  $TAL_t^i$  ( $i = n3 + 1, n3 + 2 \dots n$ );

$\omega_t^i$  – временной ряд, заданный в виде модели APCC, характеризующий доходности рискованных активов ( $i = 1, 2 \dots n1$ );

$\omega_t^i$  – временной ряд, заданный в виде модели APCC, характеризующий логарифм индекса роста цен рискованных активов; ( $i = n1 + 1, n1 + 2 \dots n2$ );

$\alpha_i$  – доли рискованных активов в инвестиционном портфеле  $\pi = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ .

Размеры взносов, к примеру, для пожизненной схемы выплат пенсии, моделируются в зависимости от пола и возраста участника в соответствии с выражением (4) и, в частности, зависят от продолжительности накопительного периода, времени дожития (или срока выплат пенсии для срочных договоров), среднего ожидаемого размера пенсии в соответствующем регионе:

$$FirstNSPV(x, g)_t^i = \frac{NP_t^i(w(x, g) - x^{PenIn})}{\sum_{k=1}^v (1+i)^k}, \quad v = x^{PenIn} - x, \quad (4)$$

где  $NP_t^i$  – желаемый размер пенсии для нового  $i$ -го участника, моделируется как нормально распределенная случайная величина с параметрами  $N(\overline{NP}, \overline{NP}/5)$ , где  $\overline{NP}$  – средний ожидаемый (желаемый) размер негосударственной пенсии в соответствующем регионе (в НПФ) в год;

$x$  – возраст участника на момент заключения договора;

$v$  – число лет, в течение которых планируется поступление взносов;

$w(x, g)$  – предельный возраст дожития по таблице смертности на момент заключения договора:

$$w(x, g) = \sum_{k=0}^{\omega-x} k p_x^g = \sum_{k=0}^{\omega-x} \prod_{j=0}^{k-1} p_{x+j}^g = \sum_{k=0}^{\omega-x} \prod_{j=0}^{k-1} (1 - q_{x+j}^g), \quad (5)$$

где  ${}_k p_x^g$  – произведение годовых условных вероятностей дожития при условии, что лицо пола  $g$  имеет возраст  $x$ ;

$p_x^g$  – годовая вероятность дожития лица в возрасте  $x$  пола  $g$  до начала следующего возрастного интервала;  $p_x^g = 1 - q_x^g$ ,  $q_x^g$  – годовая вероятность смерти лица пола  $g$  возраста  $x$ .

Для срочной схемы выплат вместо предельного возраста дожития для определения первоначального взноса используется срок выплат. Для схемы выплат с установленными взносами величина взносов моделируется на основе статистических данных с учетом распределения размеров выплат по полу и возрасту методом обратной функции.

Для моделирования взносов по каждой возрастной группе на  $t$ -ом шаге алгоритма необходимо задать закон распределения количества лет участия в программе НПФ для каждой половозрастной группы. Для этих целей используются двумерные законы распределения для случайных величин  $\xi_1$  – возраст участника,  $\xi_2$  – количество лет участия в программе отдельно для группы женщин и мужчин:

$$P_{\xi_1 \xi_2}^g(z_x, y_j) = P(\xi_1 = z_x, \xi_2 = y_j) = p_{x,j}^g, \\ p_{x,j}^g = 0, \quad \forall j > x, \quad x, j = 0, 1 \dots x^{PenIn},$$

где  $p_{x,j}^g$  – вероятность события: «участник пола  $g$  возраста  $z_x = x$  лет, участвует в программе НПФ  $y_j = j$  лет».

Таблица распределения вероятностей для двумерного распределения случайных величин  $\xi_1, \xi_2$  при фиксированном  $g$  имеет нижний треугольный вид (таблица 1).

**Таблица 1. Двумерный закон распределения случайных величин  $\xi_1$  – текущий возраст участника,  $\xi_2$  – количество лет участия в программе при фиксированном  $g$**

		$\xi_2$								
	$z y$	0	...	19	20	21	22	...	49	50
$\xi_1$	0	$P_{0,0}$	...	0	0	0	0	...	0	0
	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
	19	$P_{19,0}$	...	$P_{19,19}$	0	0	0	...	0	0
	20	$P_{20,0}$	...	$P_{20,19}$	$P_{20,20}$	0	0	...	0	0
	21	$P_{21,0}$	...	$P_{21,19}$	$P_{21,20}$	$P_{21,21}$	0	...	0	0
	22	$P_{22,0}$	...	$P_{22,19}$	$P_{22,20}$	$P_{22,21}$	$P_{22,22}$	...	0	0
	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
	49	$P_{49,0}$	...	$P_{49,19}$	$P_{49,20}$	$P_{49,21}$	$P_{49,22}$	...	$P_{49,49}$	0
	50	$P_{50,0}$	...	$P_{50,19}$	$P_{50,20}$	$P_{50,21}$	$P_{50,22}$	...	$P_{50,49}$	$P_{50,50}$

На основе двумерного закона распределения  $P_{\xi_1, \xi_2}^g(z_x, y_j)$  строится одномерный закон распределения для случайной величины «Количество лет участия в программе для участников пола  $g$ , текущий возраст которых  $z_x = x$  лет»:

$$P_{\xi_2}^g(y_j | \xi_1 = z_x) = \frac{P_{\xi_1, \xi_2}^g(z_x, y_j)}{P_{\xi_1}^g(z_x)}, y_j = j, j = 0, 1 \dots x^{PenIn}.$$

$$P_{\xi_1}^g(z_x) = \sum_{j=0}^{z_x} p_{x,j}^g.$$

Полученное условное распределение вероятностей используется для построения законов распределения взносов активных участников НПО. Закон распределения случайной величины  $\xi_3$  - «Размер взносов активного участника пола  $g$  возраста  $z_x$ , при условии, что он участвует в программе  $y_j$  лет», к примеру, для пожизненной схемы выплат пенсии, представлен в таблице 2.

**Таблица 2. Закон распределения случайной величины  $\xi_3$  - «Размер взносов активного участника пола  $g$  возраста  $z_x$ , при условии, что он участвует в программе  $y_j$  лет», к примеру, для пожизненной схемы выплат пенсии**

Размер взносов активного участника пола $g$ возраста $z_x=x$ , при условии, что он участвует в программе $y_j$ лет	$CNSPV(x, g   y_j = 0) = FirstNSPV(z_x - y_j, g), y_j = 0$	$CNSPV(x, g   y_j = 1) = FirstNSPV(z_x - y_j, g), y_j = 1$	...	$CNSPV(x, g   y_j = z_x) = FirstNSPV(z_x - y_j, g), y_j = z_x$
$P_{\xi_2}^g(y_j   \xi_1 = z_x)$	$P_{\xi_2}^g(y_j = 0   \xi_1 = z_x)$	$P_{\xi_2}^g(y_j = 1   \xi_1 = z_x)$	...	$P_{\xi_2}^g(y_j = z_x   \xi_1 = z_x)$

Моделирование размера взноса для участников половозрастной группы  $(x, g)$  в момент времени  $t$  осуществляется следующим образом: для всех участников  $i = 1, 2 \dots M_t^{CNSPV}(x, g)$  генерируется методом обратной функции случайная величина «размер взноса  $i$ -го участника из половозрастной группы  $(x, g)$  в фиксированный момент  $t$ » (в модели она обозначена как  $CNSPV(x, g)_t^i$ ) - распределенная по закону распределения  $\xi_3$ . Далее определяется сумма взносов для половозрастной группы  $(x, g)$  в момент  $t$ .

$$M_t^{CNSPV}(x, g) \sum_{i=1}^{M_t^{CNSPV}(x, g)} CNSPV(x, g)_t^i.$$

Аналогично определяется объем взносов для участников срочных схем с установленными выплатами. Для участников схемы с установленными взносами объем взносов определяется на основании закона распределения взносов по возрастам, построенного по статистическим данным.

Авторами разработан алгоритм и прикладное программное средство для имитационного моделирования резервов НПФ по НПО. Входными параметрами выступают: начальный резерв; ставки наращивания и дисконтирования; доли активов, параметры моделей, описывающих доходности активов (или индексы роста цен активов), и исходные статистические данные к ним; статистические данные, характеризующие количество и объем поступления и оттока финансовых средств; распределение размеров поступающих взносов по полу и возрасту; статистические данные о размерах выплат негосударственной пенсии, размерах выплат выкупных сумм, размерах выплат участникам при расторжении договоров; возраст выхода на пенсию женщин и мужчин; начальное распределение участников пенсионной программы по возрастам и полу; таблица смертности; вероятность для индивида выхода на пенсию по причинам, не связанным с достижением пенсионного возраста; количество пенсионеров в начальный момент времени; функция распределения, характеризующая возраст и пол нового активного участника пенсионной программы; статистические данные наблюдений: по количеству расторжений договоров в единицу времени; по количеству завершившихся в единицу времени договоров, в связи с исполнением обязательств фондом в полном объеме по срочным договорам НПО; по количеству поступающих но-

вых членов в пенсионную программу; распределения по полу и возрасту участников на начальный момент исследования; статистические данные о половозрастных характеристиках участников, заключающих договора с НПФ по НПО; количество имитаций; период исследования. На выходе получают: количественные и половозрастные характеристики участников НПО для каждого такта времени (средние значения по имитационным экспериментам); результаты расчёта резервов НПФ по НПО по каждому имитационному эксперименту для каждого такта времени; гистограммы законов распределения и точечные характеристики законов распределения резервов НПФ по НПО для выбранных тактов времени; средние значения характеристик, отражающие динамику и половозрастную структуру участников пенсионных программ для каждого такта времени.

### 3. Результаты исследования, апробация

Апробация модели проведена на основе статистических данных Оренбургского филиала НПФ. Моделирование осуществлялось на период с 2019 года (соответствует  $t=1$ ) по 2031 год (соответствует  $t=12$ ).

В расчетах использовались следующие рисковые финансовые инструменты: облигации Альфа Банка ( $a_1$ ), облигации Башнефть ( $a_2$ ), облигации ВТБ Банка ( $a_3$ ). Доходность безрисковых финансовых инструментов составляет 7% годовых ( $a_0$ ).

Расчеты производились при следующих значениях параметров:  $Y_0=337000$  тыс. руб., уровень инфляции 4% в год, ожидаемый размер негосударственной пенсии (в среднем) – 12 тыс.руб./мес., срок выплат пенсии для срочных договоров (в среднем) – 5 лет, ожидаемая ставка дохода от инвестирования – 11% в год.

На рисунке 1 представлены графики динамики оценки математического ожидания резервов НПФ по НПО для разных инвестиционных портфелей. Учитывая высокий риск выбранных для инвестирования облигаций, увеличение долей рисковых активов в портфеле негативно сказывается на динамике математического ожидания резерва НПО.

Анализ плотности распределения резерва позволяет собрать описательную статистику по годам, провести анализ рисков.

Важнейшей задачей финансовых организаций является оценка финансовой надежности компании. Для оценки финансовой надежности предлагается использовать традиционную в математической теории риска страхования характеристику «вероятность разорения».

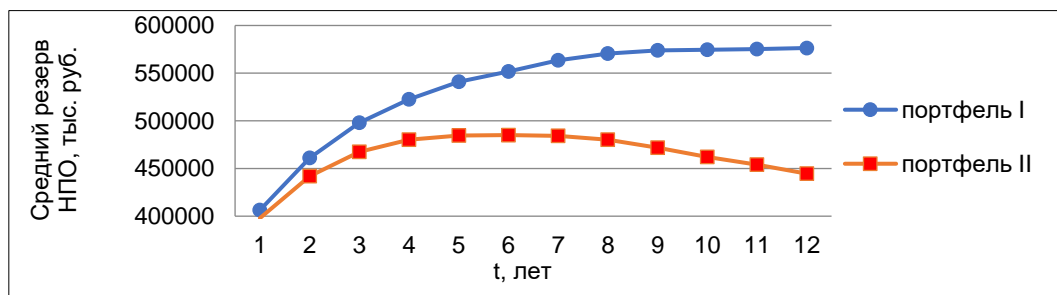


Рис. 1. Графики оценок математического ожидания резервов НПФ по годам,  $\pi I = (0.6; 0.2; 0.1; 0.1)$ ;  $\pi II = (0.4; 0.2; 0.2; 0.2)$

Как правило, аналитиков финансовых компаний интересует не только вероятность разорения в понимании снижения размера капитала до нуля, но и достижение значений размера капитала ниже некоторого критического уровня, т.е. оценка риска вступления организации в зону «финансовой ненадежности». Приведем определения предлагаемых характеристик риска.

Вероятность неразорения за конечный промежуток времени  $(0, T]$  при начальном капитале  $u$  [Yarkova, Renner, 2020]:

$$\varphi(u, T) = P(Y_t > 0, \forall t = 1, 2 \dots T / Y_0 = u). \quad (6)$$

Вероятность разорения за конечный промежуток времени  $(0, T]$

$$\psi(u, T) = 1 - \varphi(u, T). \quad (7)$$

Вероятность неразорения в момент времени  $t$

$$\varphi_t(u) = P(Y_t > 0 / Y_0 = u). \quad (8)$$

Вероятность разорения в момент времени  $t$ :

$$\psi_t(u) = 1 - \varphi_t(u). \quad (9)$$

Вероятность вступления в зону «финансовой ненадежности» в момент  $t$

$$\psi_t^{kr}(u) = P(Y_t \leq Y^{kr} / Y_0 = u). \quad (10)$$

Вероятность вступления в зону «финансовой ненадежности» за период  $T$ :

$$\psi^{kr}(u) = 1 - P(Y_t > Y^{kr}, \forall t = 1, 2 \dots T / Y_0 = u). \quad (11)$$

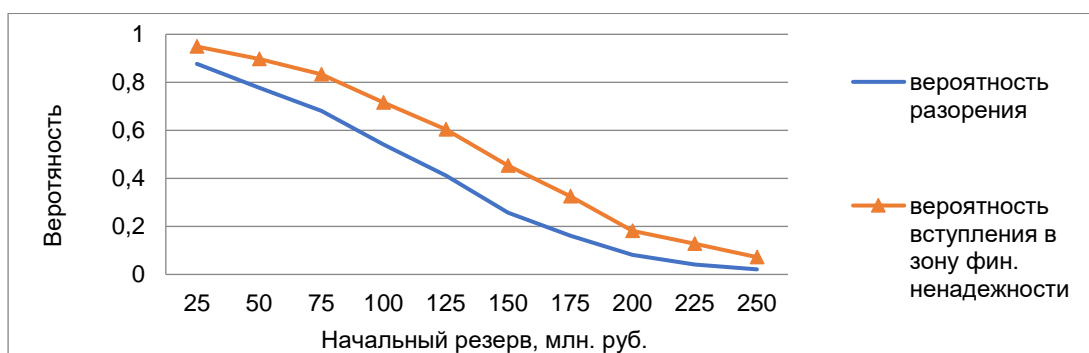
В таблице 3 представлены точечные оценки характеристик распределений резервов для двух сценариев распределения интенсивностей расторжения договоров. Сценарий I предусматривает текущее распределение интенсивности расторжения договоров. Согласно сценарию II интенсивность расторжения договоров увеличена в два раза.

**Таблица 3. Оценки характеристик распределений резервов для двух сценариев распределения интенсивностей расторжения договоров при  $Y_0=100\ 000$  тыс. руб. и интенсивности поступления новых участников в программу 35 чел./мес.**

Время $t$ , лет	Математическое ожидание $Y_t$ , тыс. руб.		Среднее квадратическое отклонение $Y_t$ , тыс. руб.		Коэффициент асимметрии		Вероятность разорения $\psi_t(u)$	
	Сценарий I	Сценарий II	Сценарий I	Сценарий II	Сценарий I	Сценарий II	Сценарий I	Сценарий II
1	66797,2	61298,57	16397,82	18427,09	-0,007	0,092	0	0
2	108101,7	95245,44	23277,41	25349,74	0,014	0,117	0	0
3	131017,4	113134,6	27783,68	30144,61	0,138	0,055	0	0
4	141413,9	118265,1	31278,48	33639,96	0,097	-0,033	0	0
5	146198,3	120146,8	33119,32	37655,32	0,031	-0,142	0	0
6	144948,5	117310,5	35683,23	39152,42	0,022	-0,042	0	0,001
7	143617	114874,9	37920,08	40278,35	0,077	0,018	0	0,002
8	137711,7	107880,3	38818,29	40421,75	-0,016	-0,087	0	0,005
9	129086	98958,56	40054,48	42210,91	0,018	-0,104	0,002	0,012
10	118811,3	90733,54	40838,1	42660,34	0,002	0,024	0,003	0,018
11	109742,4	84164,98	42405,83	44221,94	-0,008	0,011	0,009	0,03
12	100350,1	81171,06	43347,41	45214,27	-0,090	-0,048	0,012	0,042

Увеличение интенсивности расторжения договоров при фиксированных значениях остальных параметров приводит к росту вероятности разорения, которая за период 12 лет достигнет значения 0.042.

Предложенный инструментарий позволяет оценить зависимость характеристик финансовой надежности компании от параметров модели. К примеру, ниже представлены графики зависимостей вероятности разорения  $\psi_t(u)$  и вероятности вступления в зону финансовой ненадежности  $\psi_t^{kr}(u)$  от резерва в начальный момент периода моделирования (рисунок 2), от интенсивности поступлений новых участников в пенсионную программу (рисунок 3), от количества пенсионеров в начальный момент периода моделирования (рисунок 4).



**Рис. 2. Графики зависимостей вероятности разорения  $\psi_t(u)$  и вероятности вступления в зону финансовой ненадежности  $\psi_t^{kr}(u)$  (при  $Y^{kr}=20000$  тыс. руб.) за период (0,12] от начального резерва (интенсивность поступления новых участников 30 чел./мес.)**

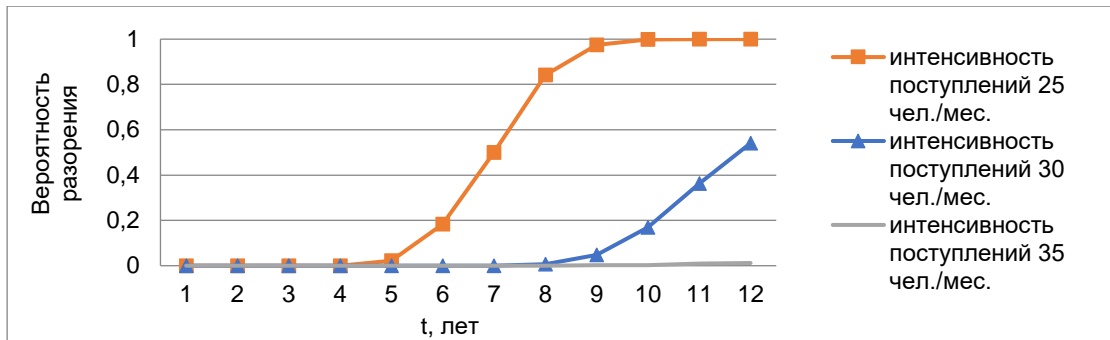


Рис. 3. Графики динамики вероятностей разорения  $\psi_t(u)$  в момент  $t$  при различной интенсивности поступления новых участников в программу НПФ (при  $Y_0=100\ 000$  тыс. руб.)

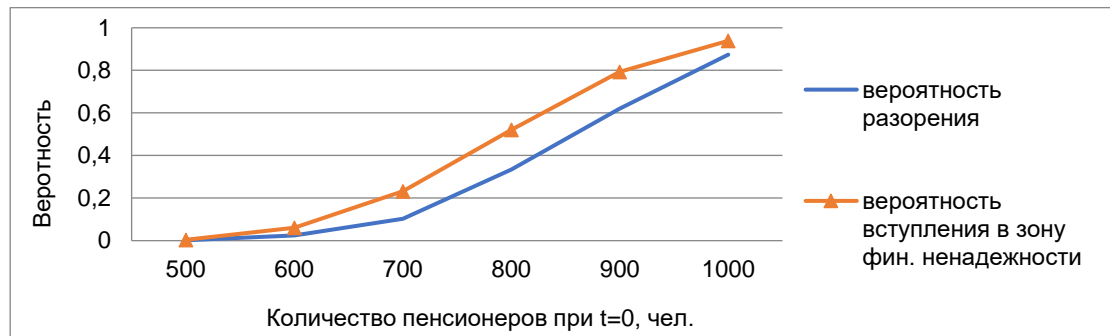


Рис. 4. Графики зависимостей вероятности разорения  $\psi(u, T)$  и финансовой ненадежности  $\psi^{kr}(u, T)$  за период (0,12] от количества пенсионеров в начальный момент времени при,  $Y_0=337000$  тыс. руб., интенсивность поступления новых участников 30 чел./мес.

Построение и анализ подобных зависимостей позволяет оценить чувствительность характеристик финансовой надежности компании к влиянию параметров модели как по отдельности, так и комплексно, определить значения параметров, оказывающих критическое влияние на финансовую надежность компании.

#### Заключение

В работе предложена математическая модель для оценки динамики финансовых резервов негосударственного пенсионного фонда по программе НПФ, позволяющая учесть стохастическую природу поступления и оттока средств, колебания численности и половозрастной структуры участников пенсионной программы, доходностей рискованных активов. В модели используются зависимости численности и половозрастной структуры участников пенсионных схем от времени, учитывающие стохастическую природу притока и оттока участников по причинам смертности, расторжения договоров, заключения договоров, переходов в группу пенсионеров по возрасту или по инвалидности.

Проведена апробация модели с использованием разработанного авторами инструментального (программного) средства поддержки принятия решений, позволяющего на основе статистических данных проводить моделирование динамики численности и половозрастной структуры участников программы НПФ, оценивать финансовые резервы и финансовую надежность компании в динамике. Проведен анализ влияния параметров программы НПФ на показатели финансовой надежности НПФ.

#### Литература

1. Волкова Т.Г. (2019) Комплексная эконометрическая модель прогнозирования факторов влияния на показатели бюджета пенсионного фонда России на период 2019-2020 гг. Вестник ЮУрГУ, Т.13, №4, С. 64-73. doi: 10.14529/em190406.
2. Горовец Н.А.(2018) Тенденции развития негосударственных пенсионных фондов в России. Научный вестник: Финансы, банки, инвестиции, № 1, С. 48-56.
3. Лавренова Е.С.(2016) Деятельность негосударственных пенсионных фондов по негосударственному пенсионному обеспечению в рамках Российской пенсионной системы. Экономика и управление, № 1, С. 82-86.
4. Лычкина Н.Н. (2013) Динамическое моделирование процессов развития пенсионной системы. Прикладная информатика, № 3(45), С. 99-110.
5. Лычкина Н.Н., Морозова Ю.А. (2011) Мультимодальный комплекс пенсионной системы как инструмент решения задач реформирования в социальной сфере. Вестник университета (Государственный университет управления), № 15, С. 187–192.



6. Макаров В.Л., Бахтизин А.Р., Сушко Е.Д.(2015) Имитация особенностей репродуктивного поведения населения в агент-ориентированной модели региона. Экономика региона, №3, С. 312-322. doi: 10.17059/2015-3-25.
7. Меденников В.И.(2020) Имитационная динамическая модель стратегического управления организацией в цифровой экономике. Цифровая экономика, № 4(12), С. 34-48. doi: 10.34706/DE-2020-04-05.
8. Помазкин Д.В.(2018) Прогнозирование развития пенсионной системы РФ. НИУ ВШЭ.
9. Хмелевская С.А., Есаулкова Т.С.(2021) В поисках новой конфигурации Российской пенсионной системы: реформирование института накопительной пенсии. Вопросы государственного и муниципального управления, № 4, С. 36-65. doi: 10.17323/1999-5431-2021-0-4-36-65.
10. Христолюбова Н.Е.(2019) Состав и структура потребительской корзины как условие эффективного перехода к цифровой экономике. Цифровая экономика, № 3(7), С. 40-44. doi: 10.34706/DE-2019-03-06.
11. Швандер К.В., Анисимова А.А.(2021) Подходы к реформированию пенсионных систем в мире и рекомендации для России. Финансовый журнал, №1, С. 125-135. doi: 10.31107/2075-1990-2021-1-125-135.
12. Шоломицкий А.Г.(2005) Риски и эффективность пенсионных программ: модельный подход. – М.: ГУ ВШЭ, 64 с.
13. Юрьева И.А., Масюк Н.Н., Васюкова Л.К.(2017) Современные тенденции развития негосударственных пенсионных фондов в условиях реформирования пенсионной системы России. Азимут научных исследований: экономика и управление, Т. 6, № 4(21), С. 290-293.
14. Яркова О.Н.(2019) Имитационное моделирование половозрастной структуры участников программ негосударственного пенсионного страхования. Девятая всероссийская научно-практическая конференция по имитационному моделированию и его применению в науке и промышленности «Имитационное моделирование. Теория и практика» (ИММОД-2019). Труды конференции, 16–18 октября 2019 г., Екатеринбург: Урал. гос. пед. ун-т., с. 253-260.
15. Яркова О.Н., Чудинова О.С.(2021) Инструментарий для моделирования динамики капитала финансовых организаций. Прикладная информатика, Т.16, № 5, С. 48-65. doi: 10.37791/2687-0649-2021-16-5-48-65.
16. Alonso-García J., Devolder P.(2015) Optimal mix between pay-as-you-go and funding in a multi-generational overlapping generations model. ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA, Vol.45, Issue 3, pp. 551-575.
17. Antonczyk D., Fitzenberger B., Mammenc E., Yu K.(2020) A nonparametric approach to identify age, time, and cohort effects // Journal of Statistical Planning and Inference, No. 204, pp. 96 -115. doi: 10.1016/j.jspi.2019.04.009.
18. Assessment of the prospects for development of a system of non-state (supplementary) pension provision in Russia (Monograph. 2017). Monograph group of authors, 180 p. doi: 10.5281/zenodo.809911.svg.
19. Bédard D., Dufresne D.(2001) Pension funding with moving average rates of return. Scandinavian Actuarial Journal, № 101, pp. 1-17. doi: 10.1080/034612301750077275.
20. Chudinova O.S., Renner A.G., Yarkova O.N.(2020) Mathematical Modeling of Population Mobility by Income. International Multi-Conference on Industrial Engineering and Modern Technologies (FarEastCon), Vladivostok, Russia, pp. 1-7, doi: 10.1109/FarEastCon50210.2020.9271507.
21. Daykin C.D., Pentikäinen T., Pesonen M.(1993) Practical risk theory for actuaries: Monographs on statistics and applied probability 53. London, Chapman & Hall, 546 p. doi: 10.2143/AST.25.1.563255.
22. Devolder P., Princep M.B., Fabian I.D.(2003) Stochastic optimal control of annuity contracts // Insurance: Mathematics and Economics, No. 33(2), pp. 227-238. doi: 10.1016/S0167-6687(03)00136-7.
23. Kuang By D., Nielsen B., Nielsen J.P.(2008) Identification of the age-period-cohort model and the extended chain-ladder model. Biometrika, Vol. 95, Issue 4. pp. 979-986. doi: 10.1093/biomet/asn026
24. MacDonald, B.J., Cairns, A.J.G.(2011) Three retirement decision models for defined contribution pension plan members: A simulation study. Insurance: Mathematics and Economics, Elsevier, No. 48(1), pp. 1-18.
25. Sabitova N., Kulakova S., Sharafutdinova I.(2015) Non-State Pension Funds in the Retirement Insurance System of the Russian Federation: Trends and Prospects. Procedia Economics and Finance, No. 27, pp. 224-229. doi:10.1016/S2212-5671(15)00994-6.
26. Silverman E., Bijak J., Hilton J., Cao V.D., Noble J.(2013) When Demography Met Social Simulation: A Tale of Two Modeling Approaches. Journal of Artificial Societies and Social Simulation (JASSS), No. 16(4), 9 p. doi: 10.18564/jasss.2327.
27. Yarkova O.N., Renner A.G.(2020) Modeling the Ruin Probability of a Non-state Pension Fund Taking into Account Risky Investments. Smart Innovation, Systems and Technologies. Springer, Cham, Vol. 138, pp. 528-539. doi: 10.1007/978-3-030-15577-3\_50.

**References in Cyrillics**

1. Volkova T.G.(2019) Kompleksnaya ekonometricheskaya model' prognozirovaniya faktorov vliyaniya na pokazateli byudzheta pensionnogo fonda Rossii na period 2019-2020 gg. Vestnik YUUrGU, T.13, №4, S. 64-73. doi: 10.14529/em190406.
2. Gorovec N.A.(2018) Tendencii razvitiya negosudarstvennykh pensionnykh fondov v Rossii. Nauchnyy vestnik: Finansy, banki, investicii, № 1, S. 48-56.
3. Lavrenova E.S.(2016) Deyatel'nost' negosudarstvennykh pensionnykh fondov po negosudarstvennomu pensionnomu obespecheniyu v ramkah Rossijskoj pensionnoj sistemy. Ekonomika i upravlenie, № 1, S. 82-86.
4. Lychkina N.N. (2013) Dinamicheskoe modelirovanie processov razvitiya pensionnoj sistemy. Prikladnaya informatika, № 3(45), S. 99-110.
5. Lychkina N.N., Morozova YU.A.(2011) Mul'timodal'nyj kompleks pensionnoj sistemy kak instrument resheniya zadach reformirovaniya v social'noj sfere. Vestnik universiteta (Gosudarstvennyy universitet upravleniya), № 15, S. 187–192.
6. Makarov V.L., Bahtizin A.R., Sushko E.D.(2015) Imitaciya osobennostej reproduktivnogo povedeniya naseleniya v agent-orientirovannoj modeli regiona. Ekonomika regiona, №3, C. 312-322. doi: 10.17059/2015-3-25.
7. Medennikov V.I.(2020) Imitacionnaya dinamicheskaya model' strategicheskogo upravleniya organizacii v cifrovoj ekonomike. Cifrovaya ekonomika, № 4(12), S. 34-48. doi: 10.34706/DE-2020-04-05.
8. Pomazkin D.V.(2018) Prognozirovaniye razvitiya pensionnoj sistemy RF. NIU VSHE.
9. Hmelevskaya S.A., Esaulkova T.S.(2021) V poiskah novoj konfiguracii Rossijskoj pensionnoj sistemy: reformirovanie instituta nakopitel'noj pensii. Voprosy gosudarstvennogo i municipal'nogo upravleniya, № 4, S. 36-65. doi: 10.17323/1999-5431-2021-0-4-36-65.
10. Hristolyubova N.E.(2019) Sostav i struktura potrebitel'skoj korziny kak uslovie effektivnogo perekhoda k cifrovoj ekonomike. Cifrovaya ekonomika, № 3(7), S. 40-44. doi: 10.34706/DE-2019-03-06.
11. Shvander K.V., Anisimova A.A.(2021) Podhody k reformirovaniyu pensionnykh sistem v mire i rekomendacii dlya Rossii. Finansovyj zhurnal, №1, S. 125-135. doi: 10.31107/2075-1990-2021-1-125-135.
12. Sholomickij A.G.(2005) Riski i effektivnost' pensionnykh programm: model'nyj podhod. – M.: GU VSHE, 64 s.
13. Yur'eva I.A., Masyuk N.N., Vasyukova L.K.(2017) Sovremennyye tendencii razvitiya negosudarstvennykh pensionnykh fondov v usloviyah reformirovaniya pensionnoj sistemy Rossii. Azimut nauchnykh issledovaniy: ekonomika i upravlenie, T. 6, № 4(21), S. 290-293.
14. Yarkova O.N.(2019) Imitacionnoe modelirovanie polovozrastnoj struktury uchastnikov programm negosudarstvennogo pensionnogo strahovaniya. Devyataya vserossiyskaya nauchno-prakticheskaya konferenciya po imitacionnomu modelirovaniyu i ego primeneniyu v nauke i promyshlennosti «Imitacionnoe modelirovanie. Teoriya i praktika» (IMMOD-2019). Trudy konferencii, 16–18 oktyabrya 2019 g., Ekaterinburg: Ural. gos. ped. un-t., c. 253-260.
15. Yarkova O.N., CHudinova O.S.(2021) Instrumentarij dlya modelirovaniya dinamiki kapitala finansovykh organizacij. Prikladnaya informatika, T.16, № 5, S. 48-65. doi: 10.37791/2687-0649-2021-16-5-48-65.

*Яркова Ольга Николаевна, к.э.н., доцент,  
Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет,  
Санкт-Петербург, Россия. ORCID – 0000-0002-8745-3031  
e-mail: [yarkova\\_on@mail.ru](mailto:yarkova_on@mail.ru)*

*Чудинова Ольга Сергеевна, к.э.н., доцент,  
Оренбургский государственный университет, Оренбург, Россия.  
ORCID – 0000-0001-7705-7986  
e-mail: [bravicheva\\_os@mail.ru](mailto:bravicheva_os@mail.ru)*

*Раменская Алина Владимировна, к.э.н.,  
Оренбургский государственный университет, Оренбург, Россия.  
ORCID – 0000-0003-4732-9105  
e-mail: [alina.ramenskaya@yandex.ru](mailto:alina.ramenskaya@yandex.ru)*

**Ключевые слова**

Математическое моделирование, половозрастная структура, риск-менеджмент, вероятность разорения, негосударственное пенсионное обеспечение, негосударственный пенсионный фонд, финансовые резервы

**Olga Yarkova, Olga Chudinova, Alina Ramenskaya, Mathematical model of risk assessment of a non-state pension Fund**

**Keywords**

Mathematical modeling, gender and age structure, risk management, ruin probability, non-state pension provision, non-state pension Fund, financial reserves

DOI:10.34706/DE-2022-04-06

JEL classification: C02 Математические методы, C63 вычислительные техники, имитационное моделирование, G23 Небанковские финансовые учреждения, G32 Финансовые риски и управление рисками.

**Abstract**

The work is devoted to the development of mathematical models and a tool for the analysis of actuarial and financial risks of non-state pension Funds for non-state pension provision, taking into account the stochastic variability in the number and gender and age structure of participants. The author's mathematical model is proposed for assessing the dynamics of financial reserves of non-state pension Funds for non-state pension provision, which allows taking into account the stochastic nature of the inflow and outflow of funds, fluctuations in the number and gender and age structure of participants in the pension program. The model was tested using the developed decision support tool. The proposed toolkit makes it possible to evaluate the indicators of financial reliability of non-state pension Funds in the medium and long term.