

## 1.5. ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ИНДИКАТОР КАЧЕСТВА УСЛОВИЙ ЖИЗНИ

С. А. Айвазян<sup>1</sup>, М. Ю. Афанасьев, А. В. Кудров<sup>1</sup>,

Центральный экономико-математический институт РАН

В работе представлены восемь индикаторов основных направлений регионального развития, их особенности и анализ взаимосвязи. Предложена процедура формирования интегрального индикатора качества условий жизни, основанная на экспертном подходе и имитационной модели, учитывающей корреляционную взаимосвязь интегрального индикатора с индикаторами основных направлений. В результате ее апробации построены интегральные индикаторы качества условий жизни по данным 2015 и 2016г. Оценены параметры модели взаимосвязи интегрального индикатора качества условий жизни субъектов РФ с характеристиками уровня их развития по основным направлениям. Для проверки набора показателей, характеризующих направление социально-экономического развития «качество населения», применена методика статистического группирования показателей с использованием минимальных покрывающих деревьев.

JEL classification: C12; C51; R15.

### Введение

**Индикаторы в базисе характеристик дифференциации.** Новизна предлагаемого подхода к формированию индикаторов различных направлений социально-экономического развития субъектов РФ и интегрального индикатора качества условий жизни определяется тем, что все индикаторы строятся в пространстве характеристик дифференциации, которые формируются и оцениваются с помощью теоретически обоснованных моделей регионального развития. Положение региона в базисе характеристик дифференциации определяет его экономическое своеобразие. Базис  $B_t = (\{l_{it}\}_i, \{te_{it}\}_i, \{s_{it}^1\}_i, \{s_{it}^2\}_i, \{dte_{it}\}_i)$  характеристик региональной дифференциации на временном отрезке  $[t-1, t]$  включает пять компонент:  $l_{it}$  — масштаб экономики региона  $i$  в момент  $t$ ;  $te_{it}$  — сопоставимая оценка технической эффективности;  $s_{it}^1$  — индекс отраслевой специализации;  $s_{it}^2$  — индекс индустриализации;  $dte_{it}$  — тренд технической эффективности,  $dte_{it} = te_{it} - te_{it-1}$ . В качестве характеристики масштаба экономики в этом исследовании используется показатель Росстата «численность экономически активного населения». В базис включаются первая и вторая главные компоненты структуры ВРП. Первая главная компонента разделяет добывающие и прочие регионы и характеризуется как *индекс отраслевой специализации*. Вторая главная компонента разделяет обрабатывающие, равномерно развитые и развивающиеся регионы и характеризуется как *индекс индустриализации*. Оценки технической эффективности и ее тренда формируются с помощью производственных функций на основе концепции стохастической границы (Айвазян, Афанасьев, Кудров, 2016а, 2016б).

**Формирование индикатора, характеризующего направление экономического развития.** Индикатор по выбранному направлению социально – экономического развития строится на основе компонентного анализа таким образом, чтобы быть максимально связанным с базисными экономическими характеристиками. Пусть  $I^S(\gamma, y_t^k) = \sum_i \gamma_i y_{i,t}^k$  — линейная комбинация группы показателей, характеризующих направление  $S$  социально-экономического развития региона  $k$ , где  $y_t^k = (y_{1,t}^k, \dots, y_{N,t}^k)$  — вектор значений  $N$  показателей направления  $S$  для  $k$ -го региона в момент  $t$ ,  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_N)$  – вектор коэффициентов линейной комбинации  $I^S(\gamma, y_t^k)$ .

Пусть  $IB^S(\delta, B_{t-1}^k) = \delta_{1,t} l_{k,t-1} + \delta_{2,t} s_{k,t-1}^1 + \delta_{3,t} s_{k,t-1}^2 + \delta_{4,t} te_{k,t-1} + \delta_{5,t} dte_{k,t-1}$  — линейная комбинация компонент векторного базиса для  $k$ -го региона, построенного по данным предыдущего года  $(t-1)$ , где  $B_t^k = (l_{i,t}(k), s_{i,t}^1(k), s_{i,t}^2(k), te_{i,t}(k), dte_{i,t}(k))$  и  $\delta \in \mathbb{R}^5$ . Ставится задача определения значений вектор-параметров  $\gamma, \delta$ , при которых  $I^S(\gamma, y_i)$  и  $IB^S(\delta, B_{i-1})$  максимально коррелированы, т.е.

$$(\hat{\gamma}, \hat{\delta}) = \underset{\gamma \in \mathbb{R}^N, \delta \in \mathbb{R}^5}{\operatorname{argmax}} \operatorname{corr}(I^S(\gamma, y_i), IB^S(\delta, B_{i-1})).$$

Аналитическое решение этой задачи представлено в работах (Hotelling, 1936; Waugh, 1942, Айвазян, Афанасьев, Кудров, 2018).

<sup>1</sup> Айвазян Сергей Арутюнович — ЦЭМИ РАН, Москва. Скончался 12.03.2019.

Афанасьев Михаил Юрьевич — ЦЭМИ РАН, Москва; miafan@cemi.rssi.ru.

Кудров Александр Владимирович — ЦЭМИ РАН, Москва; kovlal@inbox.ru.

Основные положения методологии построения индикаторов в базе характеристик дифференциации и результаты ее апробации при построении индикаторов двух направлений представлены в статье (Айвазян, Афанасьев, Кудров, 2018а).

## 2. Индикаторы основных направлений социально-экономического развития

**Основные направления.** На данном этапе исследований, в качестве определяющих качество жизни рассматриваются пять направлений социально-экономического развития. Направления «производство товаров и услуг», «материальное благосостояние», «качество социальной сферы», «качество населения» описаны и оценены с помощью метода главных компонент в монографии (Айвазян, 2012). Направление «социальная безопасность», актуальность исследования которого возрастает, описано в работе (Гаврилец и др., 2016). Показатели для формирования индикаторов основных направлений социально-экономического развития представлены в следующей таблице 1.

Таблица 1. Показатели для формирования индикаторов.

| Индикатор       | Индикаторы и показатели   |
|-----------------|---|
| ИВ <sup>1</sup> | «производство товаров и услуг, объемы», 5 показателей Росстат <sup>2</sup> :<br>1 — ВРП, 2 — объем добычи полезных ископаемых; 3 — продукция обрабатывающих производств; 4 — продукция сельского хозяйства; 5 — производство электричества, газа, воды.   |
| ИВ <sup>2</sup> | «материальное благосостояние», 5 показателей Росстат <sup>3</sup> :<br>1 — среднедушевые денежные доходы; 2 — индекс производительности труда; 3 — коэффициент миграционного прироста; 4 — уровень безработицы; 5 — доля населения с доходами ниже величины прожиточного минимума.  |
| ИВ <sup>3</sup> | «производство товаров и услуг на душу», 5 показателей Росстат <sup>4</sup> :<br>1 — ВРП на душу, 2 — объем добычи полезных ископаемых на душу; 3 — продукция обрабатывающих производств на душу; 4 — продукция сельского хозяйства на душу; 5 — производство электричества, газа, воды на душу.   |
| ИВ <sup>4</sup> | «качество социальной сферы», 5 показателей Росстат <sup>5</sup> :<br>1 — ввод жилья; 2 — протяженность дорог; 3 — коэффициент фондов; 4 — нагрузка на вакансии, 5 — доля занятых с высшим образованием.   |
| ИВ <sup>5</sup> | «социальная безопасность», 5 показателей Росстат <sup>6</sup> :<br>1 — изнасилования; 2 — кражи; 3 — причинение тяжелого вреда здоровью, 4 — убийства, 5 — разбои (на 100000 населения).  |
| ИВ <sup>6</sup> | «демография», 4 показателя Росстат <sup>7</sup> :<br>1 — ожидаемая продолжительность жизни при рождении, 2 — суммарный коэффициент рождаемости, 3 — доля граждан занимающихся физкультурой и спортом, 4 — естественный прирост населения.   |
| ИВ <sup>7</sup> | «здоровье», 7 показателей Росстат <sup>8</sup> :<br>1 — смертность в трудоспособном возрасте, 2 — смертность от болезней кровообращения, 3 — смертность от онкологических заболеваний (новообразований); 4 — младенческая смертность, 5 — смертность от болезней дыхательных путей; 6 — смертность от болезней пищеварительных органов; 7 — смертность от заболеваний вирусным гепатитом. |
| ИВ <sup>8</sup> | «материальное благосостояние (субъективно)», 5 показателей Росстат <sup>9</sup> : 1 — способны заменить вышедшие из строя предметы мебели (доля опрошенных); 2 — минимально необходимый месячный доход; 3 — могут менять себе и членам семьи одежду на новую; 4 — испытывают потребность в улучшении жилищных условий; 5 — могут покупать фрукты в любое время года.                      |

Для описания направления социально-экономического развития «качество населения», построены индикаторы «демография» и «здоровье». Наборы показателей для формирования этих индикаторов сформированы на основе нормативных документов (Указ... № 204, 2018). Совокупность показателей, использованных при построении других индикаторов, сформирована с использованием методологии причинного анализа и обладает внутренней структурой, отражающей их непосредственные связи, отличающиеся от стандартных корреляционных связей. Как отмечается в (Гаврилец, Кудров, Тараканова, 2019), «в гауссовском случае для совокупности из  $m$  случайных переменных  $(X_1, \dots, X_m)$  отсутствие непосредственной связи между  $X_i$  и  $X_j$  определяется равенством нулю коэффициента частной корреляции  $\rho^{ij} = \rho(X_i, X_j | X_{i,j,c})$ , которая не включает информацию  $X_{i,j,c} = (X_k | k = 1, \dots, m, k \neq i, j)$ . Имеет место равенство:

$$\rho^{ij} = \text{cor}(\text{resid}(X_i | X_{i,j,c}), \text{resid}(X_j | X_{i,j,c})),$$

где  $\text{resid}(X | X_{i,j,c})$  — остатки регрессии  $X$  на переменные  $X_{i,j,c}$ »

<sup>2</sup> Данные Росстат: [http://www.gks.ru/bgd/regl/b16\\_14p/Main.htm](http://www.gks.ru/bgd/regl/b16_14p/Main.htm)

<sup>3</sup> Данные Росстат: [http://www.gks.ru/free\\_doc/doc\\_2016/rab\\_sila16.pdf](http://www.gks.ru/free_doc/doc_2016/rab_sila16.pdf)

<sup>4</sup> Данные Росстат: [http://www.gks.ru/bgd/regl/b16\\_14p/Main.htm](http://www.gks.ru/bgd/regl/b16_14p/Main.htm)

<sup>5</sup> Данные Росстат: [http://www.gks.ru/free\\_doc/new\\_site/inspection/itog\\_inspect1.htm](http://www.gks.ru/free_doc/new_site/inspection/itog_inspect1.htm)

<sup>6</sup> Данные Росстат: [http://www.gks.ru/free\\_doc/new\\_site/inspection/itog\\_inspect1.htm](http://www.gks.ru/free_doc/new_site/inspection/itog_inspect1.htm)

<sup>7</sup> Государственная статистика: <https://fedstat.ru/>

<sup>8</sup> Статистический сборник Здравоохранение в России: [http://www.gks.ru/bgd/regl/b17\\_34/Main.htm](http://www.gks.ru/bgd/regl/b17_34/Main.htm)

<sup>9</sup> Данные Росстат: [http://www.gks.ru/free\\_doc/new\\_site/inspection/itog\\_inspect1.htm](http://www.gks.ru/free_doc/new_site/inspection/itog_inspect1.htm)

Соответственно, для построения шести индикаторов использованы показатели, отобранные на основе анализа графа непосредственных связей. Для установления непосредственных связей проверены гипотезы  $H_0^{ij}: \rho^{ij} = 0$  против  $H_1^{ij}: \rho^{ij} \neq 0$  для всех возможных пар  $(i, j)$  переменных и выявлены значимые частные корреляции. Анализ показывает, что непосредственных связей меньше, чем это может показаться при анализе матрицы парных корреляций. Схемы взаимосвязи характеристик дифференциации и показателей, включающие графы непосредственных связей для индикаторов  $IB^1$  «производство товаров и услуг, объемы» и  $IB^2$  «материальное благосостояние», приведены авторами в работе (Айвазян, Афанасьев, Кудров, 2018b). Использованные при формировании восьми индикаторов показатели, приведенные в таблице 1, отобраны из совокупности 98 первоначально рассмотренных показателей. Семь индикаторов  $IB^i$ ,  $i=1, \dots, 7$ , построены на основе объективных показателей, один  $IB^8$  – на основе субъективных оценок – результатов обработки социологических опросов населения. В таблице 2 показаны коэффициенты при компонентах базиса характеристик дифференциации в индикаторах основных направлений, построенных по данным 2015 и 2016гг. Масштаб экономики, техническая эффективность и две первые главные компоненты структуры ВРП устойчивы во всех индикаторах.

Таблица 2. Характеристики дифференциации в индикаторах 2015 и 2016г.

|        | Индикаторы по данным 2015г. |        |        |        |        | Индикаторы по данным 2016г. |        |        |        |        |
|--------|-----------------------------|--------|--------|--------|--------|-----------------------------|--------|--------|--------|--------|
|        | l                           | te     | s1     | s2     | dte    | l                           | te     | s1     | s2     | dte    |
| $IB^1$ | 0.968                       | 0.051  | -0.056 | 0.048  | 0.043  | 0.970                       | 0.049  | -0.052 | 0.054  | 0.000  |
| $IB^2$ | 0.681                       | 0.390  | 0.275  | 0.126  | 0.452  | 0.625                       | 0.499  | 0.456  | -0.050 | 0.262  |
| $IB^3$ | 0.175                       | 0.207  | 0.443  | 0.758  | 0.085  | 0.318                       | 0.223  | 0.457  | 0.671  | 0.067  |
| $IB^4$ | 0.933                       | 0.301  | 0.041  | -0.164 | -0.024 | 0.928                       | 0.299  | -0.049 | -0.163 | 0.052  |
| $IB^5$ | 0.604                       | -0.168 | -0.045 | 0.017  | -0.082 | 0.656                       | -0.183 | -0.038 | 0.020  | -0.140 |
| $IB^6$ | 0.092                       | 0.183  | 0.714  | -0.642 | -0.134 | 0.061                       | 0.203  | 0.847  | -0.471 | 0.138  |
| $IB^7$ | -0.163                      | 0.087  | -0.285 | -0.485 | -0.145 | -0.250                      | 0.085  | -0.420 | -0.759 | -0.385 |
| $IB^8$ | 0.108                       | -0.122 | -0.468 | 0.694  | 0.352  | 0.037                       | -0.194 | -0.526 | 0.829  | -0.187 |

В таблице 3 приведена корреляционная матрица индикаторов основных направлений, построенных по данным 2016г. Наблюдается высокая положительная корреляция индикаторов  $IB^1$  «производство товаров и услуг, объемы» и  $IB^4$  «качество социальной сферы». В этих индикаторах основной высоко значимый компонент базиса – масштаб экономики. Индикатор  $IB^6$  «демография» отрицательно коррелирован с индикатором  $IB^8$  «материальное благосостояние, субъективно». Индикатор  $IB^7$  «здоровье» отрицательно коррелирован со всеми индикаторами, характеризующими материальные условия жизни. Наиболее высокая отрицательная корреляция с индикатором  $IB^3$  «производство товаров и услуг на душу». Наблюдается высокая отрицательная корреляция индикаторов  $IB^5$  «социальная безопасность» и  $IB^6$  «демография».

Таблица 3. Корреляционная матрица индикаторов по данным 2016г.

| 2016   | $IB^1$ | $IB^2$ | $IB^3$ | $IB^4$ | $IB^5$ | $IB^6$ | $IB^7$ | $IB^8$ |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $IB^1$ | 1      |        |        |        |        |        |        |        |
| $IB^2$ | 0.633  | 1      |        |        |        |        |        |        |
| $IB^3$ | 0.456  | 0.724  | 1      |        |        |        |        |        |
| $IB^4$ | 0.957  | 0.745  | 0.406  | 1      |        |        |        |        |
| $IB^5$ | 0.768  | 0.024  | 0.058  | 0.635  | 1      |        |        |        |
| $IB^6$ | -0.165 | 0.514  | 0.163  | 0.002  | -0.731 | 1      |        |        |
| $IB^7$ | -0.338 | -0.543 | -0.89  | -0.225 | -0.049 | -0.058 | 1      |        |
| $IB^8$ | 0.302  | -0.230 | 0.308  | 0.092  | 0.681  | -0.875 | -0.363 | 1      |

### 3. Формирование интегрального индикатора качества условий жизни

**Агрегирование индикаторов основных направлений.** Представленный здесь подход основан на представлении интегрального индикатора как линейной комбинации индикаторов основных направлений. При этом все индикаторы основных направлений социально-экономического развития могут использоваться как независимые. Однако, как было показано в таблице 3, некоторые из построенных восьми индикаторов сильно положительно коррелированы. Например, по данным 2016г. коэффициент корреляции индикаторов  $IB^1$  «производство товаров и услуг, объемы» и индикатора  $IB^4$  «качество социальной сферы» – 0.957. Поэтому некоторые индикаторы основных направлений целесообразно агрегировать на основе компонентного анализа. На первом этапе процедуры агрегирования построена первая главная компонента  $PC1(1 - IB^8)$  по совокупности всех восьми индикаторов. Она представлена в столбце (3)

таблицы 4. Коэффициенты всех индикаторов в первой главной компоненте, кроме  $IB^6$  «демография» и  $IB^7$  «здоровье», положительны. Рост индекса региона с положительным коэффициентом приводит к росту его индекса по интегральному индикатору. Отрицательные знаки коэффициентов при индикаторах «демографии» и «здоровья» не позволяют рассматривать первую главную компоненту  $PC1(IB^1 - IB^8)$  в качестве интегрального индикатора. В то же время, первая главная компонента  $PC1(IB^1 - IB^5, IB^8)$ , построенная по всем индикаторам, кроме «демографии» и «здоровья», правильно учитывает входящие в нее индикаторы и может использоваться как агрегат шести индикаторов при построении интегрального индикатора качества жизни. В этом случае мы располагаем набором из трех индикаторов: агрегат  $PC1(IB^1 - IB^5, IB^8)$  и два исходных индикатора  $IB^6$  «демография» и  $IB^7$  «здоровье». Как показано в таблице 3, индикаторы «демография» и «здоровье» независимы, поэтому их агрегирование нецелесообразно. Следовательно, набор из этих трех индикаторов является минимальным, позволяющим учесть построенные индикаторы с учетом их взаимосвязи.

Формирование агрегатов и выбор их количества целесообразно осуществлять на основе экспертного подхода. Можно, например, отметить (см. столбец (4) таблицы 4), что индикатор  $IB^8$  «материальное благосостояние, субъективно» слабо значим в агрегате  $PC1(IB^1 - IB^5, IB^8)$ . Если при построении интегрального индикатора желательно повысить значимость объективных оценок, то индикатор  $IB^8$  следует использовать как независимый, а агрегированный индикатор построить как первую главную компоненту  $PC1(IB^1 - IB^5)$  на основе пяти индикаторов. Она представлена в столбце (5) таблицы 4. Заметим, что объясняющая способность первой главной компоненты  $PC1(IB^1 - IB^5)$  составляет 55.6% общей дисперсии и превышает объясняющую способность 46.8% первой главной компоненты  $PC1(IB^1 - IB^5, IB^8)$ . Соответственно, при формировании интегрального индикатора могут использоваться агрегат  $PC1(IB^1 - IB^5)$  и три исходных индикатора  $IB^6, IB^7, IB^8$ . Причем, агрегат  $PC1(IB^1 - IB^5)$  можно интерпретировать как индикатор материальной основы жизни, построенный на объективных данных.

Таблица 4. Первые главные компоненты по группам индикаторов по данным 2016

|        | IB                  | $PC1(IB^1 - IB^8)$ | $PC1(IB^1 - IB^5, IB^8)$ | $PC1(IB^1 - IB^5)$ | $PC1(IB^1, IB^4, IB^5)$ | $PC1(IB^2, IB^3)$ | $IB^6$ | $IB^7$ | $IB^8$ |
|--------|---------------------|--------------------|--------------------------|--------------------|-------------------------|-------------------|--------|--------|--------|
| (1)    | (2)                 | (3)                | (4)                      | (5)                | (6)                     | (7)               | (9)    | (10)   | (8)    |
|        | PC%                 | 37.7               | 46.8                     | 55.6               | 72.4                    | 86.1              | 100    | 100    | 100    |
| $IB^1$ | произв. объем       | 0,493              | 0.529                    | 0.527              | 0.623                   |                   |        |        |        |
| $IB^2$ | матер.благ.объект.  | 0,401              | 0.439                    | 0.463              |                         | 0.707             |        |        |        |
| $IB^3$ | произв. на душу     | 0,396              | 0.403                    | 0.409              |                         | 0.707             |        |        |        |
| $IB^4$ | качество соц. сферы | 0,464              | 0.510                    | 0.516              | 0.596                   |                   |        |        |        |
| $IB^5$ | внутр. безопасность | 0,304              | 0.293                    | 0.272              | 0.507                   |                   |        |        |        |
| $IB^6$ | демограф. (прирост) | -0,115             |                          |                    |                         |                   | 1      |        |        |
| $IB^7$ | здоровье            | -0,294             |                          |                    |                         |                   |        | 1      |        |
| $IB^8$ | матер.благ.субъект. | 0,180              | 0.135                    |                    |                         |                   |        |        | 1      |

Таблица 5. Корреляционная матрица по данным 2016.

| Корреляц. матрица        | $PC1(IB^1 - IB^8)$ | $PC1(IB^1 - IB^5, IB^8)$ | $PC1(IB^1 - IB^5)$ | $PC1(IB^1, IB^4, IB^5)$ | $PC1(IB^2, IB^3)$ | $IB^6$ | $IB^7$ | $IB^8$ |
|--------------------------|--------------------|--------------------------|--------------------|-------------------------|-------------------|--------|--------|--------|
| $PC1(IB^1 - IB^8)$       | 1                  |                          |                    |                         |                   |        |        |        |
| $PC1(IB^1 - IB^5, IB^8)$ | 0,981              | 1                        |                    |                         |                   |        |        |        |
| $PC1(IB^1 - IB^5)$       | 0,969              | 0.996                    | 1                  |                         |                   |        |        |        |
| $PC1(IB^1, IB^4, IB^5)$  | 0,869              | 0.889                    | 0.874              | 1                       |                   |        |        |        |
| $PC1(IB^2, IB^3)$        | 0,746              | 0.761                    | 0.783              | 0.390                   | 1                 |        |        |        |
| $IB^6$                   | -0,112             | -0.052                   | 0.004              | -0.253                  | 0.285             | 1      |        |        |
| $IB^7$                   | -0,552             | -0.4716                  | -0.464             | -0.225                  | -0.625            | -0.058 | 1      |        |
| $IB^8$                   | 0,356              | 0.269                    | 0.213              | 0.328                   | 0.044             | -0.875 | -0.363 | 1      |

Агрегат  $PC1(IB^1 - IB^5)$ , в свою очередь, может быть разделен на две первые главные компоненты  $PC1(IB^1, IB^4, IB^5)$  и  $PC1(IB^2, IB^3)$ . Они представлены, соответственно, в (6) и (7) столбцах матрицы 4. При высокой объясняющей способности этих первых главных компонент коэффициент из корреляции 0.390 невелик. Поэтому при желании дифференцировать влияние индикаторов  $IB^1$  «производство товаров и услуг, объемы» и  $IB^3$  «производство товаров и услуг на душу», интегральный индикатор может формироваться на основе двух агрегатов  $PC1(IB^1, IB^4, IB^5)$ ,  $PC1(IB^2, IB^3)$  и трех исходных индикаторов  $IB^6, IB^7, IB^8$ .

**Модель формирования интегрального индикатора.** Далее мы исходим из того, что из индикаторов, характеризующих основные направления социально-экономического развития, на основе их компонентного анализа сформированы агрегаты, необходимые для построения интегрального индикатора качества жизни. Естественно, что общее число этих агрегатов и исходных индикаторов не менее двух и не

превышает числа исходных индикаторов, характеризующих все направления. Последний случай означает, что в результате компонентного анализа использование агрегированных индикаторов признано нецелесообразным.

**Предпосылка.** Из набора агрегированных и исходных индикаторов для построения интегрального индикатора качества жизни может быть выбран целевой индикатор.

Далее целевой индикатор будет обозначаться  $ICB^0$ , а прочие агрегаты и индикаторы –  $ICB^1, \dots, ICB^m$  ( $m \geq 1$ ). Интегральный индикатор  $IIB$  формируется как линейная комбинация индикаторов  $ICB^0, ICB^1, \dots, ICB^m$  с неотрицательными коэффициентами, в сумме равными единице. Вектор  $z^*$  весовых коэффициентов определяется в результате решения оптимизационной задачи

$$z^* = \arg \max \text{corr} (IIB(z), ICB^0) \quad (1)$$

$$\text{corr} (IIB(z), ICB^k) \geq b_k, \quad k=1, \dots, m, \quad (2)$$

$$z_0 + z_1 + \dots + z_m = 1, \quad (3)$$

$$z_0, z_1, \dots, z_m \geq 0 \quad (4).$$

Здесь  $z = (z_0, z_1, \dots, z_m)$ ;  $IIB(z) = z_0 ICB^0 + z_1 ICB^1 + \dots + z_m ICB^m$ .

В задаче  $m+1$  переменных и  $2m+2$  ограничений, включая условия неотрицательности переменных. Целевая функция (1) с  $m+1$  переменными максимизирует корреляцию интегрального индикатора  $IIB(z)$  и целевого индикатора  $ICB^0$ , экспертно выбранного из совокупности агрегированных и исходных индикаторов  $ICB^0, ICB^1, \dots, ICB^m$ . Система  $m$  ограничений (2) описывает корреляционную взаимосвязь между интегральным индикатором и нецелевыми индикаторами. При варьируемых параметрах  $b_k$  оптимизационную задачу (1-4) можно рассматривать как многокритериальную. Причем степень влияния каждого из  $m+1$  критерия на множество парето-оптимальных планов определяется экспертно задаваемыми параметрами  $b_k, k=1, \dots, m$ . При этом некоторые значения имеют качественные особенности. При значении  $b_k$  близком к 0.3, ограничение (2) предполагает значимую положительную корреляционную взаимосвязь между интегральным индикатором и индикатором  $ICB^k$ . При значении  $b_k$  близком к -0.3, ограничение (2) является слабым условием непротиворечивости интегрального индикатора и индикатора  $ICB^k$ . При значении  $b_k$  близком к 0, ограничение (2) можно рассматривать как сильное условие непротиворечивости. В прикладных задачах именно эти три типа ограничений представляют основной интерес при экспертном формировании модели (1-4). Ограничения вида (2) необязательно формируются для каждого нецелевого индикатора. Формально отсутствие такого ограничения означает, что правая часть в соответствующем неравенстве равна -1.

**Задача (1-4) может быть записана как задача нелинейной оптимизации** и решена численными методами. Иногда экспертные ограничения могут накладываться не только на индикаторы, но и на ранги отдельных групп регионов в интегральном индикаторе. Формализация таких задач также не представляет особых трудностей, но при этом приходится использовать булевы переменные, что затрудняет поиск глобального оптимума. В качестве альтернативного подхода к решению задачи (1-4) может быть использован метод имитации, позволяющий оценить необходимые коэффициенты корреляции и учесть дополнительные рекомендации экспертов.

**Пример 1 интегрального индикатора качества жизни.** Рассмотрим пример построения интегрального индикатора качества жизни по данным 2016г. с использованием агрегата – первой главной компоненты  $PC1(IV^1 - IV^5)$ , построенной на основе пяти индикаторов основных направлений, а также индикаторов  $IV^6$  «демография» и  $IV^7$  «здоровье», сформированных на основе объективных данных. Индикатор  $IV^8$  «материальное благосостояние (субъективно)» будем использовать только для оценки его взаимосвязи с интегральным индикатором. В качестве целевого индикатора будем рассматривать агрегат  $PC1(IV^1 - IV^5)$  который, как отмечено выше, характеризует материальную основу жизни. Тогда  $ICB^0 = PC1(IV^1 - IV^5)$ . Соответственно,  $m=2, ICB^1 = IV^6, ICB^2 = IV^7$ . Учитывая положительную корреляцию агрегата  $PC1(IV^1 - IV^5)$  с индикатором  $IV^6$ , при формировании ограничений (2) ограничимся условиями слабой непротиворечивости интегрального индикатора с индикатором  $IV^6$  «демография». Так как корреляция индикатора  $PC1(IV^1 - IV^5)$  с индикатором  $IV^7$  отрицательна, введем условие значимой положительной корреляции интегрального индикатора и индикатора  $IV^7$  «здоровье».

В таком случае интегральный индикатор является решением следующей оптимизационной задачи.

$$z^* = \arg \max \text{corr} (IIB(z), ICB^0)$$

$$\text{corr} (IIB(z), IV^6) \geq -0.3,$$

$$\text{corr} (IIB(z), IV^7) \geq 0.3,$$

$$z_0 + z_1 + z_2 = 1,$$

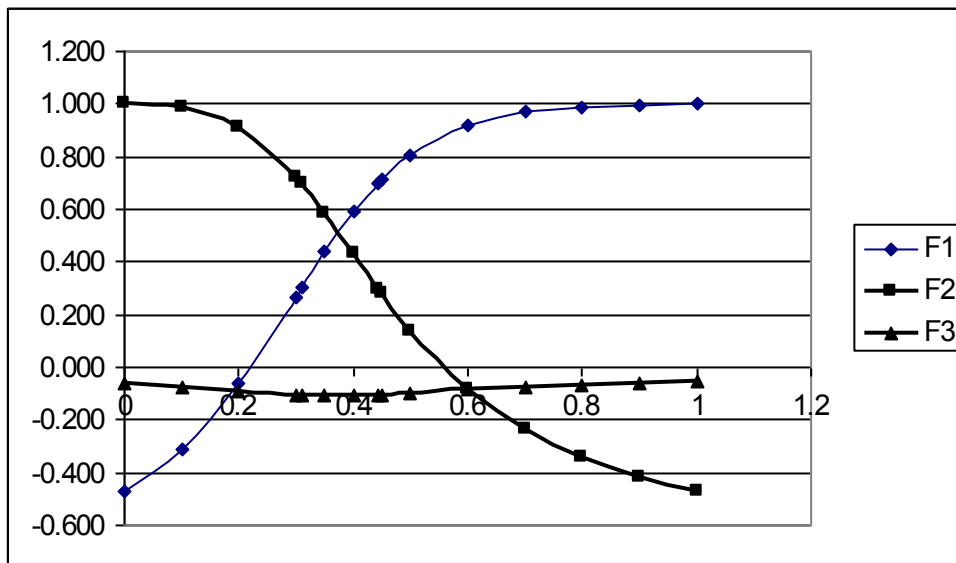
$$z_0, z_1, z_2 \geq 0.$$

Здесь  $z = (z_0, z_1, z_2)$ ;  $IIB(z) = z_0 ICB^0 + z_1 IV^6 + z_2 IV^7$ .

На рис. 1 по оси абсцисс – значение коэффициента  $z_0$ , по оси ординат – значение коэффициента корреляции. Кривая F1 описывает возрастающую зависимость коэффициента корреляции интегрального индикатора  $IIB(z)$  с целевым индикатором  $ICB^0$  от значения весового коэффициента  $z_0$  при  $z_1 = 0$ . **Кривая F2** описывает убывающую зависимость коэффициента корреляции интегрального индикатора  $IIB(z)$  с индикатором  $IV^7$  «здоровье» от значения весового коэффициента  $z_0$  при  $z_1 = 0$ . Кривая F3 – зависимость коэффициента корреляции интегрального индикатора  $IIB(z)$  с индикатором  $IV^6$  «демогра-

фия» от значения весового коэффициента  $z_0$  при  $z_1 = 0$ . В нашем примере особенностью рассматриваемой задачи является то, что при любых значениях  $z_0$  ограничение  $\text{corr}(\text{IIB}(z), \text{IB}^6) \geq -0.3$  выполняется как строгое неравенство. Оптимальным решением задачи является вектор  $z^* = (0.434; 0; 0.566)$ , причем  $\text{corr}(\text{IIB}(z^*), \text{ICB}^0) = 0.693$ ,  $\text{corr}(\text{IIB}(z^*), \text{IB}^6) = -0.043$ ,  $\text{corr}(\text{IIB}(z^*), \text{IB}^7) = 0.3$ ,  $\text{corr}(\text{IIB}(z^*), \text{IB}^8) = -0.061$ .

Рис. 1. Зависимость коэффициентов корреляции от значения  $z_0$  при  $z_1 = 0$



В столбце (4) таблицы П1 приложения приведен перечень регионов в соответствии с рангами по интегральному индикатору  $\text{IIB}^1$ . Для сравнения, в первом столбце этой таблицы регионы упорядочены в соответствии с рангами по агрегату  $\text{PC1}(\text{IB}^1 - \text{IB}^5)$ , который, как отмечено выше, характеризует материальную основу жизни. Регионы Республика Ингушетия, Республика Северная Осетия-Алания, Республика Дагестан, лидирующие в рейтинге по индикатору  $\text{IB}^7$  «здоровье» (см. таблицу 4), в индикаторе  $\text{PC1}(\text{IB}^1 - \text{IB}^5)$  находятся в замыкающей трети регионов. В интегральном индикаторе, значимо коррелированном с индикатором  $\text{IB}^7$  «здоровье», эти три региона в числе 10 лучших. Такой интегральный индикатор сильно меняет представление о качестве жизни, опирающееся на характеристики ее материальной основы.

**Пример 2 интегрального индикатора качества жизни.** Для того, чтобы уточнить роль и преимущества экспертного подхода, вместо условия  $\text{corr}(\text{IIB}(z), \text{IB}^7) \geq 0.3$ , устанавливающего значимую положительную корреляционную взаимосвязь интегрального индикатора и индикатора «здоровье», введем сильное условие непротиворечивости  $\text{corr}(\text{IIB}(z), \text{IB}^7) \geq 0$ . Это условие ослабляет роль индикатора  $\text{IB}^7$  «здоровье» в интегральном индикаторе, по сравнению с примером 1, и усиливает роль индикатора материальной основы жизни  $\text{PC1}(\text{IB}^1 - \text{IB}^5)$ . В примере 2 интегральный индикатор является решением следующей оптимизационной задачи.

$$z^* = \arg \max \text{corr}(\text{IIB}(z), \text{ICB}^0)$$

$$\text{corr}(\text{IIB}(z), \text{IB}^6) \geq -0.3,$$

$$\text{corr}(\text{IIB}(z), \text{IB}^7) \geq 0,$$

$$z_0 + z_1 + z_2 = 1,$$

$$z_0, z_1, z_2 \geq 0,$$

$$\text{где } z = (z_0, z_1, z_2); \text{IIB}(z) = z_0 \text{ICB}^0 + z_1 \text{IB}^6 + z_2 \text{IB}^7.$$

Оптимальным решением этой задачи является вектор  $z^* = (0.527; 0; 0.473)$ , причем

$$\text{corr}(\text{IIB}(z^*), \text{ICB}^0) = 0.853, \text{corr}(\text{IIB}(z^*), \text{IB}^6) = -0.03, \text{corr}(\text{IIB}(z^*), \text{IB}^7) = 0, \text{corr}(\text{IIB}(z^*), \text{IB}^8) = 0.0013.$$

В столбце (6) таблицы П1 приложения приведен перечень регионов в соответствии с их рангами по этому интегральному индикатору  $\text{IIB}^2$ . По сравнению с примером 1, регионы Республика Ингушетия, Республика Северная Осетия – Алания и Республика Дагестан ослабляют свои позиции в интегральном индикаторе и занимают, соответственно, ранги 10, 17 и 18.

На основе представленного здесь подхода построены также интегральные индикаторы по данным 2015г. Решения оптимизационных задач, рассмотренных в примерах 1 и 2 с использованием индикаторов, построенных по данным 2015г., приводит к следующим результатам.

Оптимальным решением задачи примера 1 для индикаторов 2015г. является вектор  $z^* = (0.435; 0; 0.565)$ . Для интегрального индикатора  $\text{corr}(\text{IIB}(z^*), \text{ICB}^0) = 0.677$ ,  $\text{corr}(\text{IIB}(z^*), \text{IB}^6) = 0.088$ ,  $\text{corr}(\text{IIB}(z^*), \text{IB}^7) = 0.3$ ,  $\text{corr}(\text{IIB}(z^*), \text{IB}^{28}) = -0.079$ . В интегральном индикаторе Республики Ингушетия, Республика Северная Осетия-Алания, Республика Дагестан находятся в числе 11 лучших.

Оптимальным решением задачи примера 2 является вектор  $z^* = (0.515; 0; 0.485)$ , причем  $\text{corr}(\text{IIB}(z^*), \text{ICB}^0) = 0.831$ ,  $\text{corr}(\text{IIB}(z^*), \text{IB}^6) = 0.024$ ,  $\text{corr}(\text{IIB}(z^*), \text{IB}^7) = 0$ ,

$\text{corr}(IB(z^*), IB^{2s}) = 0.057$ . Регионы Республика Северная Осетия – Алания, Республика Ингушетия и Республика Дагестан имеют ранги, соответственно, 10, 12 и 22.

В таблице 6 даны координаты интегральных индикаторов, а также агрегата  $PC1(IB^1 - IB^5)$  в базе характеристик дифференциации. В построенных интегральных индикаторах из всех компонентов база наиболее влияние имеет масштаб экономики. Также значима техническая эффективность, а в индикаторах 2016г. – вторая главная компонента структуры ВРП. В агрегате  $PC1(IB^1 - IB^5)$  по данным 2015г. значимы все компоненты базиса; по данным 2016г. утрачивает значимость тренд технической эффективности. Коэффициенты корреляции агрегатов  $PC1(IB^1 - IB^5)$ , по данным 2015 и 2016г. – 0.986; интегральных индикаторов  $IB^1$ - 0.924; интегральных индикаторов  $IB^2$ - 0.959.

Таблица 6. Агрегат и интегральные индикаторы в базе.

| год | 2016             |        |        | 2015             |        |        |
|-----|------------------|--------|--------|------------------|--------|--------|
|     | $PC1(IB^1-IB^5)$ | $IB^1$ | $IB^2$ | $PC1(IB^1-IB^5)$ | $IB^1$ | $IB^2$ |
| l   | 1.586            | 0.564  | 0.651  | 1.549            | 0.596  | 0.677  |
| te  | 0.408            | 0.228  | 0.243  | 0.369            | 0.212  | 0.226  |
| s1  | 0.250            | -0.123 | -0.092 | 0.214            | -0.064 | -0.040 |
| s2  | 0.312            | -0.284 | -0.234 | 0.401            | -0.092 | -0.050 |
| dte | 0.102            | -0.169 | -0.146 | 0.267            | 0.038  | 0.057  |

В таблице 7 приведены регрессии интегральных индикаторов  $IB^1$ ,  $IB^2$  по данным 2016 и 2015гг. на индикаторы основных направлений. В этих регрессиях с относительно высокими коэффициентами детерминации все оценки значимы на 1% уровне. В таблице 7 приведены только те индикаторы направлений, которые значимо взаимосвязаны с интегральными индикаторами. В каждой регрессии значимо влияние индикатора  $IB^7$  здоровья, что соответствует условию оптимизационной задачи (1-4), решенной при формировании интегральных индикаторов. Влияние агрегата  $PC1(IB^1 - IB^5)$  проявляется в двух вариантах. Первый, устойчивый для двух лет, через индикаторы  $IB^2$  *материальное благосостояние* и  $IB^5$  *социальная безопасность*. Второй – через индикаторы  $IB^1$  *производство, объемы* и  $IB^3$  *производство на душу*, причем, последний значим только в регрессии 2016г. Таким образом, наблюдается значимая взаимосвязь сформированных интегральных индикаторов качества жизни с пятью индикаторами четырех направлений:  $IB^1$  *производство, объемы*,  $IB^2$  *материальное благосостояние*,  $IB^3$  *производство на душу*,  $IB^5$  *социальная безопасность*,  $IB^7$  *здоровье*. Объясняющая способность  $R^2$  большинства моделей для 2016г. в интервале 0,77 – 0,8.

Таблица 7. Взаимосвязь интегральных индикаторов  $IB^1$ ,  $IB^2$  и индикаторов направлений по данным 2016г. и 2015г.

|  | $IB^1$<br>2016          | $IB^2$<br>2016          | $IB^1$<br>2016          | $IB^2$<br>2016          | $IB^1$<br>2015          | $IB^2$<br>2015          | $IB^1$<br>2015          | $IB^2$<br>2015          |
|--|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| (1)  | (2)                     | (3)                     | (4)                     | (5)                     | (6)                     | (7)                     | (8)                     | (9)                     |
| регионы  | 80                      | 80                      | 80                      | 80                      | 80                      | 80                      | 80                      | 80                      |
| $R^2$  | <b>0.794</b>            | <b>0.775</b>            | <b>0.793</b>            | <b>0.773</b>            | 0.764                   | 0.863                   | 0.703                   | <b>0.718</b>            |
| $IB^1$ <i>производство, объемы</i>                   |                         |                         | <b>0.554</b><br>(0.041) | <b>0.667</b><br>(0.049) |                         |                         | <b>0.551</b><br>(0.043) | <b>0.645</b><br>(0.050) |
| $IB^2$ <i>материальное благосостояние</i>            | <b>0.485</b><br>(0.042) | <b>0.584</b><br>(0.051) |                         |                         | <b>0.446</b><br>(0.043) | <b>0.508</b><br>(0.046) |                         |                         |
| $IB^3$ <i>производство на душу</i>                   |                         |                         | <b>0.263</b><br>(0.084) | <b>0.316</b><br>(0.102) |                         |                         |                         |                         |
| $IB^5$ <i>социальная безопасность (преступность)</i> | <b>0.409</b><br>(0.035) | <b>0.493</b><br>(0.043) |                         |                         | <b>0.394</b><br>(0.036) | <b>0.467</b><br>(0.039) |                         |                         |
| $IB^7$ <i>здоровье</i>                               | <b>0.490</b><br>(0.042) | <b>0.387</b><br>(0.051) | <b>0.627</b><br>(0.035) | <b>0.552</b><br>(0.096) | <b>0.439</b><br>(0.043) | <b>0.368</b><br>(0.046) | <b>0.363</b><br>(0.043) | <b>0.294</b><br>(0.097) |

В скобках стандартные ошибки, все оценки значимы на 1% уровне

В таблице 8 приведены регрессии интегральных индикаторов  $IB^1$ ,  $IB^2$  по данным 2016 г. на индикаторы основных направлений для 38 регионов с равномерно развитой структурой ВРП (Айвазян, Афанасьев, Кудров, 2016b). В этих регрессиях повышается значимость индикатора  $IB^1$  *производство, объемы*. При этом влияние индикатора  $IB^3$  *производство на душу* становится незначимым. Наблюдается значимая взаимосвязь сформированных интегральных индикаторов качества жизни с индикаторами:  $IB^1$  *производство, объемы*,  $IB^2$  *материальное благосостояние*,  $IB^5$  *социальная безопасность*,  $IB^7$  *здоровье*. Объясняющая способность  $R^2$  большинства моделей для этой группы регионов выше, чем для всей совокупности, и находится в интервале 0,83 – 0,87.



Таблица 8. Взаимосвязь интегральных индикаторов ИВ<sup>1</sup>, ИВ<sup>2</sup> и индикаторов направлений по данным 2016г. для 38 равномерно развитых регионов.

|  | ИВ <sup>1</sup> 2016    | ИВ <sup>2</sup> 2016    | ИВ <sup>1</sup> 2016    | ИВ <sup>2</sup> 2016    |
|--|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| (1)  | (2)                     | (3)                     | (4)                     | (5)                     |
| регионы  | 38                      | 38                      | 38                      | 38                      |
| <b>R<sup>2</sup></b>                                   | <b>0.863</b>            | <b>0.865</b>            | <b>0.836</b>            | <b>0.834</b>            |
| ИВ <sup>1</sup> производство, объемы                   |                         |                         | <b>0.632</b><br>(0.062) | <b>0.759</b><br>(0.075) |
| ИВ <sup>2</sup> материальное благосостояние            | <b>0.514</b><br>(.060)  | <b>0.618</b><br>(.072)  |                         |                         |
| ИВ <sup>3</sup> производство на душу                   |                         |                         | <b>0.157</b><br>(0.170) | <b>0.189</b><br>(0.204) |
| ИВ <sup>5</sup> социальная безопасность (преступность) | <b>0.480</b><br>(.056)  | <b>0.577</b><br>(.068)  |                         |                         |
| ИВ <sup>7</sup> здоровье                               | <b>0.625</b><br>(0.084) | <b>0.549</b><br>(0.101) | <b>0.629</b><br>(0.154) | <b>0.554</b><br>(0.185) |

Все оценки, кроме показанных цветом, значимы на 1% уровне

В таблице 9 приведены агрегированные индексы и ранги федеральных округов по уровню жизни. При агрегировании индексов регионов, входящих в федеральный округ, использовались весовые коэффициенты, равные доле численности населения региона в общей численности населения федерального округа. В столбце (3) приведены ранги федеральных округов по индикатору PC1(ИВ<sup>1</sup> – ИВ<sup>5</sup>) за 2015 и 2016гг. В столбцах (4) и (5) индексы по индикатору ИВ<sup>2</sup>. В столбцах (7) и (8) – индексы по интегральному индикатору ИВ<sup>2</sup> за 2015 и 2016гг. В столбце (2) – разность рангов, приведенных в столбцах (3) и (6), которая показывает, на сколько позиций повысился ранг федерального округа в соответствии с интегральным индикатором по сравнению с рангом по индикатору PC1(ИВ<sup>1</sup> – ИВ<sup>5</sup>).

Таблица 9. Индексы и ранги федеральных округов по уровню жизни.

| федеральный округ | (3)-(6) | агрегат PC1(ИВ <sup>1</sup> – ИВ <sup>5</sup> ) |             |             | интегральный индикатор ИВ <sup>2</sup> |             |             |
|-------------------|---------|---|-------------|-------------|--|-------------|-------------|
|                   |         | ранг PC1  | индекс 2015 | индекс 2016 | ранг ИВ <sup>2</sup>                   | индекс 2015 | индекс 2016 |
| (1)               | (2)     | (3)   | (4)         | (5)         | (6)                                    | (7)         | (8)         |
| Центральный       | 0       | 1   | 3.689       | 3.664       | 1                                      | 1.760       | 1.935       |
| Северо-Западный   | 0       | 2   | 2.179       | 2.168       | 2                                      | 0.864       | 0.933       |
| Южный             | 1       | 4   | 0.814       | 0.792       | 3                                      | 0.521       | 0.614       |
| Северо-Кавказский | 3       | 8   | -0.922      | -0.865      | 5                                      | 0.170       | 0.131       |
| Приволжский       | -1      | 5   | 0.709       | 0.471       | 6                                      | 0.115       | -0.015      |
| Уральский         | -1      | 3   | 1.670       | 1.735       | 4                                      | 0.246       | 0.397       |
| Сибирский         | -2      | 6   | -0.443      | -0.357      | 8                                      | -0.411      | -0.451      |
| Дальневосточный   | 0       | 7   | -0.525      | -0.372      | 7                                      | -0.228      | -0.184      |

Центральный и Северо-западный федеральные округа сохраняют, соответственно, первую и вторую позиции как по интегральному индикатору ИВ<sup>2</sup>, сформированному с учетом индикатора ИВ<sup>7</sup> здоровья, так и по индикатору PC1(ИВ<sup>1</sup> – ИВ<sup>5</sup>), характеризующему материальную основу жизни. Ранг Дальневосточного федерального округа по интегральному индикатору тоже совпадает с рангом по агрегату PC1(ИВ<sup>1</sup> – ИВ<sup>5</sup>). Эти три федеральных округа устойчивы к переходу от агрегата PC1(ИВ<sup>1</sup> – ИВ<sup>5</sup>) к интегральному индикатору ИВ<sup>2</sup>. Ранги Южного, Приволжского и Уральского федеральных округов изменились на единицу. Эти федеральных округа можно рассматривать как слабо устойчивые. Ранг Сибирского федерального округа ухудшился на две позиции. Ранг Северо-Кавказского федерального округа улучшился на три позиции. Эти два федеральных округа можно характеризовать как неустойчивые при переходе от индикатора PC1(ИВ<sup>1</sup> – ИВ<sup>5</sup>), отражающего материальную основу жизни, к интегральному индикатору ИВ<sup>2</sup>, учитывающему здоровье. Таким образом, ранги шести из восьми рассмотренных федеральных округов устойчивы или слабо устойчивы относительно двух способов оценки: по агрегату PC1(ИВ<sup>1</sup> – ИВ<sup>5</sup>) оценки и интегральному индикатору ИВ<sup>2</sup>. Ранги двух федеральных округов – Сибирского и Северо-Кавказского неустойчивы.



#### 4. Методика статистического группирования по направлениям набора социально-экономических показателей регионов РФ с использованием минимальных покрывающих деревьев

Построение индексов, отражающих интересующую специфику, всегда требует формирования исходной группы показателей, релевантных рассматриваемой специфике. Как правило, эти группы показателей формируются экспертно (РА Эксперт-рейтинг; РИА Рейтинг). Однако малоиспользуемыми остаются статистические принципы выявления таких групп показателей, которые бы подтверждали существование общих экономических факторов и позволяли формировать релевантное группирование.

Далее для формирования групп релевантных показателей мы применим один из подходов, основанных на теории графов. В результате, для рассматриваемого набора социально-экономических показателей мы построим иерархию взаимосвязей показателей в виде так называемого, “минимального покрывающего дерева” и изучим его топологические свойства. Следует отметить, например, работы, в которых “минимальные покрывающие деревья” использовались для корреляционных сетей:

цен акций компаний, торгуемых на рынках США (Onnela et al., 2002; Onnela, 2006), Великобритании (Coelho et al., 2007) и Японии (Jung et al., 2008)). Один из важных результатов, полученных в этих работах, состоит в обнаружении группирования акции компаний из одного сектора на “ветках минимального покрывающего дерева”;

данных магнитоэнцефалографии различных участков головного мозга человека. Выявление и изучение функциональных модулей головного мозга с использованием магнитоэнцефалографических метрик позволяет более точно определять целевые участки головного мозга в случае необходимости хирургии. В результате применения минимальных покрывающих деревьев получены функциональные модули головного мозга, состоящие из участков, выполняющих единые функции, и расположенных по “веткам” дерева (Lee et al., 2006; Voersma et al., 2011; Stam et al., 2014).

Обозначим неориентированный граф взаимосвязей для набора социально-экономических показателей из Таблицы 1 через  $G = (V, E)$ , где  $V$  – набор узлов, каждому из которых соответствует свой показатель из имеющегося набора  $n$  социально-экономических характеристик,  $|V| = n$ ;  $E$  – совокупность ребер. При помощи ребер  $E$  соединяются взаимосвязанные показатели (узлы  $V$ ), каждый из которых также характеризуется силой взаимосвязи или расстоянием между соответствующими узлами.

Более формально, пусть в фиксированный момент времени для каждого региона  $l \in \{1, \dots, m\}$ , где  $m$  – число рассматриваемых регионов, имеется вектор из  $n$  показателей  $(X_1^l, \dots, X_n^l)$ . Определим расстояние между переменными  $X_i$  и  $X_j$ ,  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , как  $d(X_i, X_j) = \sqrt{1 - \text{cor}^2(X_i, X_j)}$ , для которого используется эмпирическая корреляция, которая вычисляется по панельным данным  $(X_i^l, X_j^l)_{l=1}^k$ . Таким образом, чем меньше расстояние  $d(X_i, X_j)$ , тем больше корреляция между переменными  $X_i$  и  $X_j$ . Можно показать, что определенное выше расстояние между переменными обладает свойствами метрического расстояния:

*Положительная определенность:* для любых  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  имеем  $d(X_i, X_j) \geq 0$ . Кроме того,  $d(X_i, X_j) = 0$  эквивалентно некоррелированности переменных  $X_i$  и  $X_j$ ;

*Симметрия:*  $d(X_i, X_j) = d(X_j, X_i)$ ;

*Неравенство треугольника:*  $d(X_i, X_j) \leq d(X_i, X_k) + d(X_k, X_j)$  для любых  $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ . Доказательство в работе (Dongen et al., 2012).

**Определение (покрывающее дерево).** Подграф  $G' = (V, E')$  графа  $G$  называется покрывающим деревом, если в нем все узлы  $V$  соединены при помощи  $|V| - 1$  ребра.

Можно показать, что граф  $G$  будет связным тогда и только тогда, когда для него найдется покрывающее дерево. Предположим, что граф  $G$  является связным. Тогда существует хотя бы одно покрывающее дерево графа  $G$ . Среди всех покрывающих деревьев графа  $G$  нас будут интересовать в некотором смысле минимальные:

**Определение (минимальное покрывающее дерево).** Покрывающее дерево  $\tilde{G}'$  для графа  $G$  называется минимальным покрывающим деревом, если

$$\tilde{G}' = \operatorname{argmin}_{G' \in \mathcal{H}} \sum_{(X_i, X_j) \in E'} d(X_i, X_j),$$

где  $\mathcal{H}$  – множество всех покрывающих деревьев графа  $G$ .

Как указывается в работе (Mantegna, 1999), использование минимальных покрывающих корреляционных деревьев позволяет выявить группы близких узлов графа  $G$ , извлекая из корреляционной матрицы показателей наиболее сильные связи. В результате, близкие узлы графа  $G$  выстраиваются в форме “ветки” минимального покрывающего дерева. И хотя переход к минимальному покрывающему дереву сопровождается потерей довольно многих связей между показателями, он позволяет идентифицировать “ветки” показателей, характеризуемых единой спецификой.

Отметим некоторые важные свойства минимальных покрывающих деревьев (Harris et al. 2008):

Пусть  $S$  – подмножество узлов графа  $G$ , не совпадающее с пустым множеством или  $V$ . Тогда каждое минимальное покрывающее дерево графа  $G$  содержит ребро  $(\tilde{X}_i, \tilde{X}_j) = \operatorname{argmin}_{X_i \in S, X_j \in (V \setminus S), (X_i, X_j) \in E} d(X_i, X_j)$ .

Пусть  $C$  – цикл в графе  $G$ , а  $(\bar{X}_i, \bar{X}_j)$  – ребро из цикла  $C$  с максимальным  $d(\bar{X}_i, \bar{X}_j)$ . Тогда ребро  $(\bar{X}_i, \bar{X}_j)$  не входит ни в одно минимальное покрывающее дерево графа  $G$ .

Существует ряд алгоритмов построения минимального покрывающего дерева графа  $G$ . Но наиболее часто используется алгоритм Крускала (Kruskal, 1956):

**Алгоритм Крускала.**

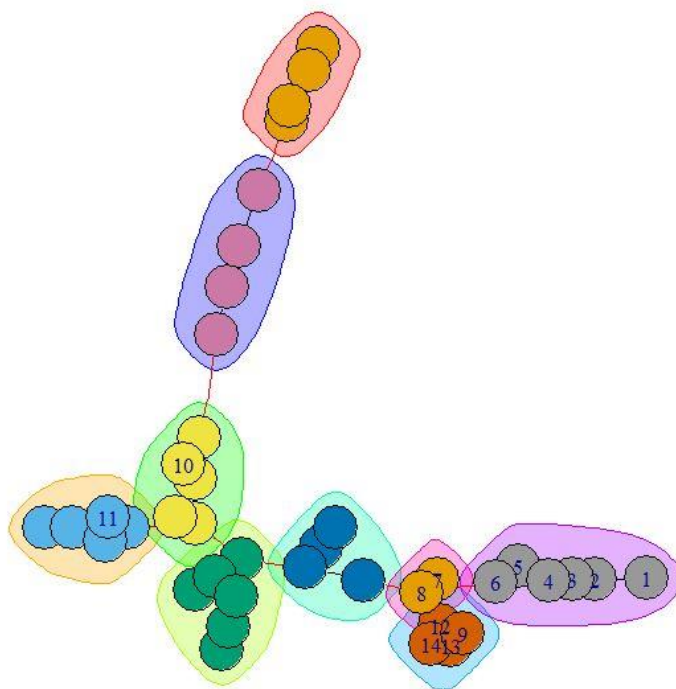
Найдем ребро  $(\bar{X}_i, \bar{X}_j) = \operatorname{argmin}_{(X_i, X_j) \in E} d(X_i, X_j)$ . Если таких ребер несколько, то случайным образом выбираем одно из них.

Из множества невыбранных ребер выбираем то, которое отвечает минимальному расстоянию между узлами и не образует цикл с ребрами, выбранными на предыдущих шагах.

Если множество ребер образует покрывающее дерево, тогда алгоритм останавливает работу. Иначе – переходим к шагу 2.

В работах (Harris et al., 2008; Matousek, Nesetril, 2008) показано, что алгоритм Крускала действительно позволяет находить покрывающее дерево графа  $G$ . Заметим также, что если в множестве  $\{d(X_i, X_j) | (X_i, X_j) \in E\}$  имеются одинаковые элементы, то найденное минимальное покрывающее дерево, возможно, неединственное.

Построим минимальное покрывающее дерево для корреляционного графа  $G = (V, E)$ , построенного для набора социально-экономических показателей из Таблицы 1 (см. рис.2).



Вершины дерева – показатели, характеризующие вышеуказанные направления социально-экономического развития по данным 2016 г. Расстояние между вершинами тем меньше, чем выше корреляция между показателями. Каждая группа показателей, выделенная цветом, используется для построения одного или двух из восьми индикаторов. В таблице 10 представлены уточненные наборы показателей для формирования индикаторов по направлениям «демография» и «здоровье». Нумерация показателей на рис. 2 соответствует нумерации в табл.10.

Все 8 показателей, представленные в таблице 10, входят в набор из 11 показателей, формирующих направление социально-экономического развития «качество населения» в соответствии с таблицей 1, и используются для построения индикаторов по направлениям «демография» и «здоровье». Однако, в таблицах 1 и 10 по показателям «здоровье» и «демография» есть отличия. На рис. 2 видно, что на показатель 9 («младенческая смертность») оказывают значительное влияние показатели:

- 12 – уровень безработицы в регионе (в % от экономически активного населения);
- 13 – доля населения с доходами ниже величины прожиточного минимума;
- 14 – нагрузка на одну вакансию.

Таблица 10. Уточненные показатели для формирования индикаторов.

|                  |   |
|------------------|---|
| ИВС <sup>7</sup> | «здоровье», 6 показателей Росстат:<br>1 – ожидаемая продолжительность жизни при рождении, 2 – смертность в трудоспособном возрасте, 3 – смертность от болезней дыхательных путей, 4 – смертность от болезней пищеварительных органов, 5 – смертность от болезней кровообращения, 6 – смертность от онкологических заболеваний (новообразований) |
| ИВС <sup>6</sup> | «демография», 2 показателя Росстат:<br>7 – суммарный коэффициент рождаемости, 8 –естественный прирост.  |

И хотя, как видно из рис. 2, «младенческая смертность» недалеко отстоит от показателей из группы «демография», она в большей степени определяется показателями, характеризующими бедность и занятость населения региона. Поэтому может рассматриваться возможность отнесения этого показателя к направлению «материальное благосостояние».

Показатель 10 (доля граждан, занимающихся физкультурой и спортом) значительно сильнее связан с показателями, отражающими среднедушевые доходы, чем с показателями демографии и здоровья. Показатель 11 (смертность от гепатита) присутствует на графе в качестве висячей вершины, которая связана с ВРП на душу.

В целом результаты статистического группирования с применением минимальных покрывающих деревьев подтверждают обоснованность представленного в табл.1 набора показателей, использованных для описания направления «качество населения». Как показано в этом разделе, есть основания для корректировки набора показателей индикатора «демография». Однако, целесообразность такой корректировки должна быть подтверждена устойчивостью во времени структуры минимального покрывающего дерева.

#### **Заключение.**

Сформирован базис из пяти характеристик дифференциации, полученных на основе теоретически обоснованных моделей регионального развития. В базисе характеристик дифференциации построены восемь индикаторов, характеризующих пять основных направлений социально – экономического развития субъектов РФ: производство товаров и услуг, материальное благосостояние, качество населения, качество социальной сферы, внутренняя безопасность. Индикатор, построенный в базисе, максимально коррелирован с индикатором, сформированным на основе соответствующей группы показателей.

Индикаторы, характеризующие материальную основу жизни, построены на основе группы показателей, отобранных на основе анализа графа непосредственных связей, построенного с использованием коэффициентов частных корреляций. Показатели направлений «демография» и «здоровье» сформированы на основе нормативных материалов.

Построен агрегат пяти индикаторов, характеризующий материальную основу жизни, который, в совокупности с индикаторами демографии и здоровья, может использоваться для моделирования интегрального индикатора качества условий жизни. Представлена модель формирования интегрального индикатора и результаты ее апробации по данным 2015 и 2016гг.

Для проверки статистической взаимосвязи наборов показателей, формирующих направление социально-экономического развития «качество населения», применена методика, основанная на использовании минимальных покрывающих деревьев для корреляционных сетей. В целом результаты применения этой методики подтвердили обоснованность набора показателей, использованных для описания направления «качество населения». Возможно, что природа факторов, влияющих на младенческую смертность, скорее связана с бедностью и состоянием рынка труда, чем с демографией. Однако, целесообразность корректировки набора показателей для построения индикатора «демография» должна быть подтверждена устойчивостью во времени структуры минимального покрывающего дерева.

**Благодарности.** Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 17-18-01080).

#### **Список литературы**

1. РА Эксперт-рейтинг. <https://raexpert.ru/docbank//9d2/edc/c7b/7e657930b91b607637dd568.pdf>
2. РИА Рейтинг. [http://vid1.rian.ru/ig/ratings/rating\\_regions\\_2018.pdf](http://vid1.rian.ru/ig/ratings/rating_regions_2018.pdf)
3. Указ Президента Российской Федерации от 07.05.2018 г. № 204. О национальных целях и стратегических задачах развития Российской Федерации на период до 2024 года.
4. Айвазян С. А. (2012). Анализ качества и образа жизни населения: эконометрический подход. М.: Наука.
5. Айвазян С. А., Афанасьев М. Ю., Кудров А. В. (2016а). Метод кластеризации регионов РФ с учетом отраслевой структуры ВРП. Прикладная эконометрика, 41, 24–46.
6. Айвазян С. А., Афанасьев М. Ю., Кудров А. В. (2016b). Модели производственного потенциала и оценки технологической эффективности регионов РФ с учетом структуры производства. Экономика и математические методы, 52 (1), 28–44.
7. Айвазян С.А., Афанасьев М.Ю., Кудров А.В. (2018а): Индикаторы регионального развития в базисе характеристик дифференциации // Цифровая экономика, №3, с. 29-41.
8. Айвазян С.А., Афанасьев М.Ю., Кудров А.В. (2018b): Векторный базис индикаторов социально-экономического развития субъектов РФ // Статистика в цифровой экономике: обучение и использование. Материалы международной научно-практической конференции, СПбГУ Санкт-Петербург, с. 20-27.
9. Гаврилец Ю.Н., Клименко К.В., Кудров А.В.(2016): Статистический анализ факторов социальной напряженности в России // Экономика и математические методы. Т. 52. № 1. С. 45-66.
10. Гаврилец Ю.Н., Кудров А. В., Тараканова И. В. (2019): Анализ внутренней структуры экономического потенциала роста // Вестник ЦЭМИ РАН, №3, стр. 1- 12.

11. Aivazian S.A., Afanasiev S.A., Kudrov A.V. (2018):. Indicators of Regional Development Using Differentiation Characteristics //Montenegrin Journal of Economics. Vol. 14, No. 3 (2018), 7-22.
12. Boersma M., Smit D.J., de Bie H.M., Van Baal G.C., Boomsma D.I., de Geus E.J., Dele-marre-van de Waal H.A., Stam C.J. (2011): Network analysis of resting state EEG in the de-veloping young brain: structure comes with maturation. Hum. Brain Mapp, 32, 413–425.
13. Coelho R.,Hutzler S., Repetowicz P., Richmond,P.(2007): Sector analysis for a FTSE portfo-lio of stocks. Physica A 373, 615–626.
14. Dongen S.V., Enright A.J. (2012): Metric distances derived from cosine similarity and Pearson and Spearman correlations. arXiv:1208.3145v1
15. Harris J. M., Hirst J. L., Mossinghoff M. J. (2008): Combinatorics and Graph Theory. Springer: second edition.
16. Hotelling H. (1936): Relationships between two sets of variables. Biometrika, 46, 321–377.
17. Jung W.-S., Kwon O.,Wang F.,Kaizoji T.,Moon H.-T., Stanley H. (2008): Group dynamics of the Japanese market. Physica A, 387, 537–542.
18. Kruskal J. B. (1956): On the Shortest Spanning Subtree of a Graph and the Traveling Sales-man Problem. Proceedings of the American Mathematical Society, 7(1).
19. Lee U., Kim S., Jung K.Y. (2006): Classification of epilepsy types through global network analysis of scalp electroencephalograms. Phys. Rev. E, Stat. Nonlinear Soft Matter Phys., Is-sue 73, Vol. 4, 19-20.
20. Mantegna R.N. (1999): Hierarchical Structure in Financial Markets. European Physical Jour-nal B, Vol. 11, Iss. 1, 193-197.
21. Matousek J., Nesetril J. (2008): An Invitation to Discrete Mathematics. Oxford University Press, second edition.
22. Onnela J.-P.(2006): Complex Networks in the Study of Financial and Social Systems. Helsin-ki: Hel-sinki University of Technology.
23. Onnela J.-P., Chakraborti A., Kaski K., Kertesz J.(2002): Dynamic asset trees and portfolio analysis. Eur.Phys.J.,B 30, 285.
24. Stam C.J., Tewarie P., Van Dellen E., van Straaten E.C., Hillebrand A., Van Mieqhem P. (2014): The trees and the forest: characterization of complex brain networks with minimum spanning trees. Int. J. Psychophysiol., 92, 129–138.
25. Waugh F. W. (1942): Regression between sets of variables. Econometrica, 46, 290–310."

### Приложение

**Таблица III. Рейтинги по агрегату  $PC1(IV^1 - IV^5)$  и интегральным индикаторам 2016**

|     | $PC1(IV^1 - IV^5)$         |     | $IV^1 = 0.434 PC1(IV^1 - IV^5) + 0.566 IV^7$ |     | $IV^2 = 0.527 PC1(IV^1 - IV^5) + 0.473 IV^7$ |
|-----|----------------------------|-----|--|-----|--|
| (1) | (2)                        | (3) | (4)  | (5) | (6)  |
| 1   | г. Москва                  | 1   | г. Москва                                    | 1   | г. Москва                                    |
| 2   | г. Санкт-Петербург         | 2   | г. Санкт-Петербург                           | 2   | г. Санкт-Петербург                           |
| 3   | Московская область         | 3   | Московская область                           | 3   | Московская область                           |
| 4   | Тюменская область          | 4   | Краснодарский край                           | 4   | Краснодарский край                           |
| 5   | Республика Татарстан       | 5   | Воронежская область                          | 5   | Воронежская область                          |
| 6   | Свердловская область       | 6   | Камчатский край                              | 6   | Тюменская область                            |
| 7   | Краснодарский край         | 7   | Республика Ингушетия                         | 7   | Камчатский край                              |
| 8   | Сахалинская область        | 8   | Белгородская область                         | 8   | Белгородская область                         |
| 9   | Ленинградская область      | 9   | Республика Северная Осетия – Алания          | 9   | Ростовская область                           |
| 10  | Нижегородская область      | 10  | Республика Дагестан                          | 10  | Республика Ингушетия                         |
| 11  | Белгородская область       | 11  | Ростовская область                           | 11  | Республика Татарстан                         |
| 12  | Чукотский автономный округ | 12  | Чеченская Республика                         | 12  | Свердловская область                         |
| 13  | Ростовская область         | 13  | Брянская область                             | 13  | Чукотский автономный округ                   |
| 14  | Воронежская область        | 14  | Приморский край                              | 14  | Ленинградская область                        |
| 15  | Республика Башкортостан    | 15  | Ставропольский край                          | 15  | Республика Башкортостан                      |
| 16  | Красноярский край          | 16  | Чукотский автономный округ                   | 16  | Калининградская область                      |
| 17  | Самарская область          | 17  | Тюменская область                            | 17  | Республика Северная Осетия – Алания          |

|    |                                 |    |                                 |    |                                 |
|----|---------------------------------|----|---------------------------------|----|---------------------------------|
| 18 | Калининградская область         | 18 | Орловская область               | 18 | Республика Дагестан             |
| 19 | Калужская область               | 19 | Республика Башкортостан         | 19 | Брянская область                |
| 20 | Липецкая область                | 20 | Калининградская область         | 20 | Приморский край                 |
| 21 | Челябинская область             | 21 | Кабардино-Балкарская Республика | 21 | Ставропольский край             |
| 22 | Пермский край                   | 22 | Ленинградская область           | 22 | Чеченская Республика            |
| 23 | Тульская область                | 23 | Свердловская область            | 23 | Нижегородская область           |
| 24 | Омская область                  | 24 | Республика Татарстан            | 24 | Липецкая область                |
| 25 | Новосибирская область           | 25 | Курская область                 | 25 | Курская область                 |
| 26 | Ярославская область             | 26 | Республика Адыгея               | 26 | Орловская область               |
| 27 | Курская область                 | 27 | Республика Марий Эл             | 27 | Калужская область               |
| 28 | Республика Саха (Якутия)        | 28 | Липецкая область                | 28 | Кабардино-Балкарская Республика |
| 29 | Магаданская область             | 29 | Тверская область                | 29 | Республика Адыгея               |
| 30 | Камчатский край                 | 30 | Республика Алтай                | 30 | Ярославская область             |
| 31 | Вологодская область             | 31 | Новгородская область            | 31 | Самарская область               |
| 32 | Ставропольский край             | 32 | Амурская область                | 32 | Новосибирская область           |
| 33 | Хабаровский край                | 33 | Ярославская область             | 33 | Сахалинская область             |
| 34 | Владимирская область            | 34 | Саратовская область             | 34 | Новгородская область            |
| 35 | Новгородская область            | 35 | Новосибирская область           | 35 | Тамбовская область              |
| 36 | Брянская область                | 36 | Нижегородская область           | 36 | Тверская область                |
| 37 | Мурманская область              | 37 | Калужская область               | 37 | Омская область                  |
| 38 | Архангельская область           | 38 | Республика Бурятия              | 38 | Саратовская область             |
| 39 | Приморский край                 | 39 | Астраханская область            | 39 | Хабаровский край                |
| 40 | Республика Адыгея               | 40 | Тамбовская область              | 40 | Республика Марий Эл             |
| 41 | Саратовская область             | 41 | Смоленская область              | 41 | Смоленская область              |
| 42 | Республика Коми                 | 42 | Псковская область               | 42 | Волгоградская область           |
| 43 | Иркутская область               | 43 | Волгоградская область           | 43 | Челябинская область             |
| 44 | Смоленская область              | 44 | Хабаровский край                | 44 | Амурская область                |
| 45 | Ульяновская область             | 45 | Республика Мордовия             | 45 | Астраханская область            |
| 46 | Волгоградская область           | 46 | Костромская область             | 46 | Республика Бурятия              |
| 47 | Оренбургская область            | 47 | Карачаево-Черкесская Республика | 47 | Псковская область               |
| 48 | Рязанская область               | 48 | Ивановская область              | 48 | Республика Мордовия             |
| 49 | Удмуртская Республика           | 49 | Омская область                  | 49 | Ивановская область              |
| 50 | Ивановская область              | 50 | Самарская область               | 50 | Рязанская область               |
| 51 | Кемеровская область             | 51 | Рязанская область               | 51 | Тульская область                |
| 52 | Тверская область                | 52 | Республика Калмыкия             | 52 | Костромская область             |
| 53 | Орловская область               | 53 | Еврейская автономная область    | 53 | Красноярский край               |
| 54 | Томская область                 | 54 | Республика Тыва                 | 54 | Республика Алтай                |
| 55 | Тамбовская область              | 55 | Челябинская область             | 55 | Карачаево-Черкесская Республика |
| 56 | Республика Мордовия             | 56 | Алтайский край                  | 56 | Магаданская область             |
| 57 | Астраханская область            | 57 | Сахалинская область             | 57 | Владимирская область            |
| 58 | Кабардино-Балкарская Республика | 58 | Республика Карелия              | 58 | Вологодская область             |
| 59 | Алтайский край                  | 59 | Забайкальский край              | 59 | Пермский край                   |
| 60 | Псковская область               | 60 | Тульская область                | 60 | Алтайский край                  |
| 61 | Республика Дагестан             | 61 | Владимирская область            | 61 | Ульяновская область             |
| 62 | Республика Бурятия              | 62 | Пензенская область              | 62 | Республика Калмыкия             |
| 63 | Амурская область                | 63 | Магаданская область             | 63 | Еврейская автономная область    |

|    |                                     |    |                          |    |                          |
|----|-------------------------------------|----|--------------------------|----|--------------------------|
| 64 | Республика Северная Осетия – Алания | 64 | Ульяновская область      | 64 | Республика Карелия       |
| 65 | Курганская область                  | 65 | Вологодская область      | 65 | Мурманская область       |
| 66 | Чувашская Республика                | 66 | Чувашская Республика     | 66 | Пензенская область       |
| 67 | Республика Марий Эл                 | 67 | Красноярский край        | 67 | Иркутская область        |
| 68 | Пензенская область                  | 68 | Курганская область       | 68 | Забайкальский край       |
| 69 | Костромская область                 | 69 | Иркутская область        | 69 | Архангельская область    |
| 70 | Чеченская Республика                | 70 | Мурманская область       | 70 | Чувашская Республика     |
| 71 | Кировская область                   | 71 | Пермский край            | 71 | Республика Тыва          |
| 72 | Республика Карелия                  | 72 | Кировская область        | 72 | Курганская область       |
| 73 | Карачаево-Черкесская Республика     | 73 | Архангельская область    | 73 | Оренбургская область     |
| 74 | Забайкальский край                  | 74 | Оренбургская область     | 74 | Кировская область        |
| 75 | Республика Хакасия                  | 75 | Томская область          | 75 | Томская область          |
| 76 | Республика Ингушетия                | 76 | Удмуртская Республика    | 76 | Республика Саха (Якутия) |
| 77 | Республика Алтай                    | 77 | Республика Хакасия       | 77 | Удмуртская Республика    |
| 78 | Республика Калмыкия                 | 78 | Республика Коми          | 78 | Республика Коми          |
| 79 | Еврейская автономная область        | 79 | Кемеровская область      | 79 | Кемеровская область      |
| 80 | Республика Тыва                     | 80 | Республика Саха (Якутия) | 80 | Республика Хакасия       |

*Айвазян Сергей Арутюнович — ЦЭМИ РАН, Москва. Скончался 12.03.2019.*

*Афанасьев Михаил Юрьевич — ЦЭМИ РАН, Москва; miafan@cemi.rssi.ru.*

*Кудров Александр Владимирович — ЦЭМИ РАН, Москва; kovlal@inbox.ru*

**Sergei Aivazian**

*Central Economics and Mathematics Institute of the Russian Academy of Sciences, Russia, Moscow; Died 12.03.2019.*

**Mikhail Afanasiev**

*Central Economics and Mathematics Institute of the Russian Academy of Sciences, Russia, Moscow; miafan@cemi.rssi.ru*

**Alexander Kudrov**

*Central Economics and Mathematics Institute of the Russian Academy of Sciences, Russia, Moscow; kovlal@inbox.ru*

**Ключевые слова**

региональная экономика; эконометрическое моделирование; проверка гипотез; индикаторы.

**Sergei Aivazian, Mikhail Afanasiev, Alexander Kudrov, Integral indicator for quality of life conditions**

**Keywords**

regional economy; econometric modeling; hypothesis testing; indicators.

**Abstract**

*The paper presents eight indicators for the main directions of regional development so as their features and analysis of the relationship. The proposed procedure for forming an integral indicator for the quality of life conditions based on an expert approach and a simulation model that takes into account the correlation relationship of the integral indicator with the indicators of the main directions. As a result of its approbation, integral indicators for the quality of life conditions were built according to the data of 2015 and 2016. The parameters of the model for the relationship of the integral indicator for the quality of life for the subjects of the Russian Federation with the characteristics of their level of development in the main directions are estimated. To check the set of indicators that characterize the direction of socio-economic development "quality of the population" the method of statistical grouping of indicators using minimal covering trees was applied.*