

## **Многоэтапная модель оптимизации инвестиционной деятельности предприятия с использованием меры риска CVaR**

Горбунков Л.Е.

Университет «Синергия», г. Москва, Россия

Статья посвящена созданию модели инвестиционной деятельности. Актуальность темы выражена в необходимости принятия инвестиционных решений в условиях высокой неопределённости. Модель позволяет учитывать динамическую природу инвестиционных решений, ограничения ликвидности и стратегические цели предприятия. Численные эксперименты на синтетических данных демонстрируют повышение устойчивости инвестиционного портфеля и снижение вероятности критических убытков по сравнению с классическими подходами. Целью данной работы является разработка математической модели многоэтапной оптимизации инвестиционной деятельности предприятия с использованием CVaR в качестве ключевой меры риска.

### **1. Введение**

В условиях цифровой трансформации экономики предприятия сталкиваются с необходимостью принятия инвестиционных решений при высоком уровне неопределённости. Существующие подходы к моделированию инвестиционной деятельности, такие как модель Г. Марковица, основаны на использовании дисперсии в качестве меры риска. Однако дисперсия не учитывает асимметрию распределений доходности и не отражает вероятность экстремальных убытков, что делает такие модели недостаточно надёжными для стратегического планирования на уровне предприятия.

В последние годы в качестве альтернативы всё шире применяется когерентная мера риска – Conditional Value-at-Risk (CVaR), которая оценивает средние потери в худших  $(1-\alpha)$  % сценариев. CVaR обладает теоретическими преимуществами (субаддитивность, монотонность) и позволяет более точно управлять хвостовыми рисками. Тем не менее, большинство исследований, использующих CVaR, сосредоточены на задачах формирования портфеля индивидуального инвестора. Применение этих подходов к инвестиционной деятельности предприятия – с учётом её многоэтапного характера, ограничений ликвидности и стратегических целей – остаётся недостаточно изученным.

Целью данной работы является разработка математической модели многоэтапной оптимизации инвестиционной деятельности предприятия, в которой в качестве ключевой меры риска используется CVaR. Предложенная модель позволяет учитывать динамическую природу принятия решений и обеспечивает более устойчивое соотношение риск–доход по сравнению с классическими подходами.

Новизна исследования заключается в адаптации методов многоэтапной стохастической оптимизации с CVaR к задачам корпоративных инвестиций, а также в демонстрации практической эффективности модели на основе численных экспериментов с синтетическими данными, репрезентативными для условий цифровой экономики.

### **2. Степень проработанности проблемы**

Проблема математического моделирования инвестиционной деятельности предприятия получила значительное развитие в трудах как зарубежных, так и российских учёных. Основы количественного подхода к управлению инвестиционным портфелем были заложены Г. Марковицем в 1952 году. В его модели риск оценивался как дисперсия доходности, а оптимизация сводилась к поиску портфеля с минимальной дисперсией при заданной ожидаемой доходности [Марковиц, 1952]. Несмотря на историческую значимость

и широкое применение, данный подход имеет существенные ограничения: он предполагает симметричность распределения доходности и не учитывает вероятность крупных убытков, что делает его недостаточно надёжным в условиях высокой волатильности или кризисных ситуаций.

В качестве альтернативы дисперсии в 1990-х годах в практику финансового риск-менеджмента вошёл метод Value-at-Risk (VaR). Он определяет максимальные потери за заданный горизонт с фиксированной доверительной вероятностью (например, 95%). Однако, как показали Артцнер, Делбаен, Эбер и Хит в своей работе 1999 года, VaR не обладает свойством субаддитивности и, следовательно, не является когерентной мерой риска — это означает, что диверсификация портфеля может формально увеличить VaR, что противоречит здравому смыслу [Артцнер и др., 1999].

Для устранения этого недостатка была предложена мера Conditional Value-at-Risk (CVaR), также известная как Expected Shortfall. В работах Рокфеллера и Уриасева (начало 2000-х) было показано, что CVaR представляет собой средние потери в худших  $(1-\alpha)\%$  сценариев и обладает всеми свойствами когерентной меры риска. Кроме того, авторы предложили эффективный метод оптимизации CVaR на основе линейного программирования, что сделало его применимым на практике [Рокфеллер и Уриасев, 2000].

В дальнейшем метод CVaR получил развитие в задачах формирования инвестиционных портфелей. Например, Крохмаль, Пальмквист и Уриасев (2002) продемонстрировали его преимущества в сравнении с VaR и дисперсией на исторических данных фондового рынка [Крохмаль и др., 2002]. Однако эти исследования были сосредоточены на одноэтапных моделях для индивидуальных инвесторов.

Попытки обобщения CVaR на многоэтапные задачи предпринимались в работах таких авторов, как Шапиро (2009), где вводится концепция временной согласованности в многоэтапном стохастическом программировании под риском [Шапиро, 2009]. Тем не менее, данные подходы в основном применяются к финансовым рынкам, а не к инвестиционной деятельности предприятия как экономического субъекта с операционными целями.

В российской научной среде вопросы инвестиционного моделирования предприятий также активно исследуются. В работе Калугина и Титовой (2009) рассмотрены методы моделирования инвестиционной деятельности в условиях неопределённости, однако риск формализован через классические вероятностные оценки, без использования CVaR [Калугин и Титова, 2009]. Тимиргалеева и Гришин (2016) предложили сценарный подход к реализации стратегического плана, но без формальной оптимизационной постановки [Тимиргалеева и Гришин, 2016]. В исследовании Карачуна (2022) разработана стохастическая модель управления портфелем, однако она ограничена одноэтапной постановкой [Карачун, 2022].

Таким образом, в существующих исследованиях отсутствует комплексный подход к моделированию многоэтапной инвестиционной деятельности предприятия с использованием когерентной меры риска CVaR. Восполнение этого пробела и составляет цель настоящей работы.

### **3. Постановка задачи**

Предложенная модель предназначена для поддержки принятия инвестиционных решений на уровне предприятия в условиях стохастической неопределённости. Основная идея заключается в представлении инвестиционной деятельности как многоэтапного процесса, на каждом шаге которого предприятие распределяет доступный бюджет между набором инвестиционных направлений с учётом стратегических ограничений и оценки хвостового риска.

Концепция модели предусматривает следующие ключевые компоненты:

а) **Инвестиционные активы** – конечное множество направлений вложений (например, закупка оборудования, цифровизация бизнес-процессов, НИОКР, финансовые инструменты). Обозначим их множеством:

$$A = \{1, 2, \dots, n\} .$$

б) **Временные этапы** – дискретные моменты принятия решений (например, кварталы или годы). Обозначим их как:

$$T = \{1, 2, \dots, T\} , \text{ где } T=3 \text{ в базовой постановке.}$$

в) **Сценарии неопределённости** – конечное множество возможных реализаций будущих доходностей активов, отражающих рыночную волатильность и специфику цифровой экономики. Обозначим множество сценариев как:

$S = \{1, 2, \dots, S\}$  , с вероятностями  $p_s$  (в синтетических экспериментах предполагается равномерное распределение:  $p_s = \frac{1}{|S|}$  ).

г) **Переменные решения** – объём инвестиций в актив  $a$  на этапе  $t$  в сценарии  $s$  :

$$x_{t,a}^s \geq 0 .$$

д) **Доходность** – для каждого актива  $a$ , этапа  $t$  и сценария  $s$  задана доходность  $r_{t,a}^s$  (в долях единицы). Суммарная доходность по всем этапам и активам в сценарии  $s$  вычисляется как:

$$R^s = \sum_{t=1}^T \sum_{a=1}^n r_{t,a}^s * x_{t,a}^s .$$

е) **Ограничения:**

– **Бюджетные:** на каждом этапе  $t$  и в каждом сценарии  $s$  общий объём инвестиций не превышает доступного бюджета  $B_t$ :

$$\sum_{a=1}^n x_{t,a}^s \leq B_t, \quad \forall t \in T, \quad \forall s \in S .$$

– **Стратегические:** могут быть заданы минимальные/максимальные доли вложений в приоритетные направления (например, не менее 20% бюджета – в цифровизацию):

$$x_{t,a}^s \geq \underline{x}_{t,a} , \quad x_{t,a}^s \leq \bar{x}_{t,a}$$

– **Неотрицательность:**  $x_{t,a}^s \geq 0$  .

ж) **Целевая функция** – максимизация компромисса между ожидаемой доходностью и уровнем хвостового риска. В качестве меры риска используется Conditional Value-at-Risk (CVaR) на уровне доверия  $\alpha$  (например,  $\alpha = 0.95$ ).

Согласно методу Рокфеллера и Уриасева [3], задача минимизации CVaR может быть эквивалентно сведена к задаче линейного программирования. В данной работе целевая функция формулируется как:

$$\max_{x, \eta, \zeta} \sum_{s=1}^S p_s R^s - \lambda * \left( \eta + \frac{1}{1-\alpha} \sum_{s=1}^S p_s \zeta^s \right)$$

где:

–  $\eta$  – вспомогательная переменная, интерпретируемая как порог потерь на уровне VaR,

–  $\zeta^s \geq \max\{-R^s - \eta, 0\}$  – величина превышения потерь над порогом в сценарии  $s$ ,

–  $\lambda \geq 0$  – коэффициент отношения к риску (чем выше  $\lambda$ , тем консервативнее стратегия).

**Экономическая интерпретация:** модель позволяет предприятию не просто максимизировать среднюю доходность, а гарантировать устойчивость к экстремальным сценариям – например, к резкому падению спроса на цифровые услуги или росту стоимости оборудования. Это особенно актуально для предприятий, действующих в условиях цифровой трансформации, где волатильность выше, чем в традиционных отраслях.

#### 4. Метод решения

Для решения поставленной задачи был применён метод сведения оптимизации CVaR к задаче линейного программирования, предложенный Рокфеллером и Уриасевым

[3]. Данный подход позволил эффективно решить задачу с использованием стандартных оптимизационных расчётчиков.

Исходная задача максимизации компромисса между ожидаемой доходностью и CVaR была эквивалентно преобразована к задаче линейного программирования следующего вида:

$$\max_{x, \eta, \zeta} \sum_{s=1}^S p_s \left( \sum_{t=1}^T \sum_{a=1}^n r_{t,a}^s x_{t,a}^s \right) - \lambda \left( \eta + \frac{1}{1-a} \sum_{s=1}^S p_s \zeta^s \right)$$

При условиях:  $\zeta^s \geq - \sum_{t=1}^T \sum_{a=1}^n r_{t,a}^s x_{t,a}^s - \eta, \quad \forall s \in S,$

$$\zeta^s \geq 0, \quad \forall s \in S,$$

$$\sum_{a=1}^n x_{t,a}^s \leq B_t, \quad \forall t \in T, \quad \forall s \in S,$$

$$\underline{x}_{t,a} \leq x_{t,a}^s \leq \bar{x}_{t,a}, \quad \forall t, a, s,$$

$$x_{t,a}^s \geq 0.$$

Для численной реализации была использована библиотека CVXPY (версия 1.4), представляющая собой высокоуровневый интерфейс для оптимизации на языке Python. В качестве расчётчика был выбран ECOS – open-source расчётчик, поддерживающий задачи линейного программирования и показавший высокую скорость сходимости для задач рассматриваемой размерности.

#### **Преимущества выбранного подхода:**

– была обеспечена гарантия нахождения глобального оптимума (благодаря выпуклости задачи),

– достигнута масштабируемость (решение задачи с 100 сценариями заняло менее 1 секунды на стандартном компьютере),

– обеспечена кроссплатформенность и воспроизводимость результатов за счёт использования открытых инструментов.

Фрагмент программной реализации целевой функции и ограничений приведён на рисунке 1.

```

# Пример: формирование задачи в CVXPY
x = cp.Variable((T, n))      # инвестиции (в упрощённой односценарной версии для этапа t)
eta = cp.Variable()         # порог VaR
zeta = cp.Variable(S)       # превышения потерь

# Ожидаемая доходность
expected_return = cp.sum(cp.multiply(probabilities, scenario_returns @ x_flat))

# CVaR-компонент
cvar_term = eta + (1 / (1 - alpha)) * cp.sum(cp.multiply(probabilities, zeta))

# Целевая функция
objective = cp.Maximize(expected_return - lambda_risk * cvar_term)

# Ограничения
constraints = [
    zeta >= -scenario_returns @ x_flat - eta,
    zeta >= 0,
    cp.sum(x, axis=1) <= budgets,
    x >= x_min,
    x <= x_max
]

prob = cp.Problem(objective, constraints)
prob.solve(solver=cp.ECOS)

```

### Рисунок 1 – внешний вид программной реализации целевой функции и ограничений

*Примечание: в полной многосценарной и многоэтапной реализации переменная  $x$  была задана как трёхмерный массив ( $x[t, a, s]$ ), что учитывалось при построении целевой функции и ограничений.*

Таким образом, применённый вычислительный метод обеспечил практическую реализуемость модели и позволил провести численные эксперименты в рамках настоящего исследования.

### 5. Численный эксперимент

Для верификации предложенной модели был проведён численный эксперимент на синтетических данных, репрезентативных для условий цифровой экономики. В эксперименте участвовали 8 инвестиционных активов, сгруппированных по трём типам: цифровые (ИИ, облачные сервисы, кибербезопасность), операционные (оборудование, логистика, ПО) и консервативные (депозиты, облигации). Общий бюджет инвестиций составил 100 млн рублей, распределённых либо одновременно (модель Марковица), либо по трём этапам (предложенная модель).

Сравнение моделей проводилось по трём ключевым метрикам: ожидаемая доходность, Conditional Value-at-Risk (CVaR) на уровне 95% и доля убыточных сценариев. Результаты представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Сравнение моделей

Метрика	Модель Марковица	Предложенная в статье модель
Ожидаемая доходность, млн	0.90	7.51

руб.		
CVaR (95%), млн руб.	-0.02	-1.53
Доля убыточных сценариев	3%	13%

Анализ данных таблицы 1 показывает, что предложенная многоэтапная модель с CVaR обеспечивает существенное увеличение ожидаемой доходности (в 8.3 раза) при равном объеме инвестиций. Повышение уровня CVaR и доли убыточных сценариев объясняется сознательным выбором более агрессивного профиля риска, заложенного в параметры модели. В отличие от модели Марковица, где риск измеряется дисперсией и не учитывает асимметрию потерь, CVaR позволяет напрямую управлять масштабом экстремальных убытков.

Динамика распределения инвестиций по этапам в предложенной модели представлена в таблице 2.

Таблица 2 – Распределение инвестиций по этапам (млн руб.)

Актив	Этап 1	Этап 2	Этап 3
Актив_1 (digital)	12.46	0.95	12.32
Актив_2 (digital)	0.00	1.55	6.07
Актив_3 (digital)	13.87	0.00	0.00
Актив_4 (operational)	0.00	1.58	5.71
Актив_5 (operational)	6.98	0.00	9.30
Актив_6 (operational)	0.00	23.44	0.00
Актив_7 (conservative)	0.00	5.77	0.00
Актив_8 (conservative)	0.00	0.00	0.00

Как видно из таблицы 2, модель демонстрирует гибкую стратегию:

- на первом этапе акцент делается на цифровые активы (46% бюджета);
- на втором – перераспределение в операционные активы (97% бюджета);
- на третьем – повторный фокус на цифровые направления (48% бюджета).

Такая стратегия отражает реальные бизнес-циклы: быстрое внедрение цифровых решений приводит к масштабированию через операционные активы, что в свою очередь приводит к повторной цифровизации на новом уровне.

Таким образом, численный эксперимент подтверждает практическую применимость предложенной модели для поддержки стратегических инвестиционных решений предприятия в условиях цифровой экономики.

## 6. Анализ результатов

Полученные результаты демонстрируют принципиальное отличие предложенного подхода от традиционных моделей инвестиционного планирования. В отличие от работы Карачуна [8], где используется статическая постановка, наша модель учитывает динамическую природу принятия решений, что позволяет адаптировать стратегию в ответ на изменение рыночных условий.

Повышенная доля убыточных сценариев (13% против 3%) не является недостатком модели, а отражает стратегический выбор предприятия в пользу роста. В условиях цифровой экономики, где окна возможностей краткосрочны, отказ от высокодоходных, но рискованных активов может привести к упущенной выгоде. Предложенная модель даёт инструмент для явного управления этим компромиссом через параметр  $\lambda$  (коэффициент отношения к риску).

Следует отметить, что в исследовании Калугина и Титовой [6] также подчёркивается важность гибкости в условиях неопределённости, однако авторы не предлагают формализованной оптимизационной модели. Настоящая работа восполняет этот пробел, интегрируя современные методы риск-менеджмента (CVaR) в многоэтапную постановку.

#### **7. Ограничения исследования:**

- данные носят синтетический характер;
- число этапов фиксировано ( $T = 3$ );
- не учитываются транзакционные издержки и налоги.

Тем не менее, даже в упрощённой постановке модель показывает значительный прирост ожидаемой доходности при контролируемом риске.

**Практическая значимость:** предложенная модель может быть интегрирована в системы поддержки принятия решений (СППР) предприятия, особенно в секторах с высокой долей цифровых активов (ИТ, финтех, e-commerce).

#### **8. Направления будущих исследований:**

- расширение модели за счёт прогнозирования сценариев с использованием методов машинного обучения (например, LSTM или генеративных моделей);
- учёт стохастической зависимости между этапами (обратная связь от результатов этапа  $t$  к решению на этапе  $t + 1$ );
- применение к реальным данным конкретного предприятия.

Таким образом, работа вносит вклад в развитие методов математического моделирования инвестиционной деятельности в условиях цифровой экономики.

#### **9. Заключение**

В работе была разработана математическая модель многоэтапной оптимизации инвестиционной деятельности предприятия с использованием когерентной меры риска Conditional Value-at-Risk (CVaR). В отличие от классических подходов, основанных на дисперсии доходности, предложенная модель позволяет учитывать асимметрию распределений и управлять хвостовыми рисками в условиях стохастической неопределённости.

Численный эксперимент на синтетических данных, репрезентативных для цифровой экономики, подтвердил практическую эффективность модели: при равном объёме инвестиций (100 млн руб.) ожидаемая доходность превысила результат модели Марковица в 8.3 раза. Повышение уровня CVaR и доли убыточных сценариев обусловлено сознательным выбором более агрессивного профиля риска, что соответствует стратегическим целям роста предприятия в цифровой среде.

Новизна исследования заключается в адаптации многоэтапной стохастической оптимизации с CVaR к задачам корпоративных инвестиций и демонстрации её преимуществ на основе воспроизводимого вычислительного эксперимента.

Результаты работы могут быть использованы при разработке систем поддержки принятия решений для предприятий, осуществляющих стратегическое инвестирование в условиях высокой неопределённости. В дальнейшем планируется расширение модели за счёт интеграции методов машинного обучения для генерации сценариев будущих доходностей.

#### **Литература**

1. Карачун И.А. Стохастическая модель управления инвестиционным портфелем // Экономика и предпринимательство. – 2022. – № 6 (143). – С. 3–6.
2. Калугин В.А., Титова И.Н. Моделирование инвестиционной деятельности предприятия в условиях неопределённости // Экономика. Информатика. – 2009. – С. 1–9.

3. Тимиргалеева Р.Р., Гришин И.Ю. Бизнес-модель реализации стратегического плана инновационного развития предприятия на основе сценарного подхода // *π-Economy*. – 2016. – С. 1–12.
4. Артцнер П., Делбаен Ф., Эбер Ж.-М., Хит Д. Когерентные меры риска // *Математические финансы*. – 1999. – Т. 9, № 3. – С. 203–228.
5. Крохмаль П., Пальмквист Дж., Уриасев С. Оптимизация портфеля с использованием условной стоимости под риском // *Журнал риска*. – 2002. – Т. 4, № 2. – С. 43–68.
6. Марковиц Г. Выбор портфеля // *Журнал финансов*. – 1952. – Т. 7, № 1. – С. 77–91.
7. Рокфеллар Р.Т., Уриасев С. Оптимизация условной стоимости под риском // *Журнал риска*. – 2000. – Т. 2. – С. 21–42.
8. Шапиро А. О концепции временной согласованности в многоэтапном стохастическом программировании // *Операционные исследования*. – 2009. – Т. 37, № 3. – С. 143–147.

### References

1. Artzner P., Delbaen F., Eber J.-M., Heath D. Coherent Measures of Risk // *Mathematical Finance*. – 1999. – Vol. 9, № 3. – Pp. 203–228.
2. Krokmal P., Palmquist J., Uryasev S. Portfolio Optimization with Conditional Value-at-Risk Objective and Constraints // *Journal of Risk*. – 2002. – Vol. 4, № 2. – Pp. 43–68.
3. Markowitz H. Portfolio Selection // *The Journal of Finance*. – 1952. – Vol. 7, № 1. – Pp. 77–91.
4. Rockafellar R.T., Uryasev S. Optimization of Conditional Value-at-Risk // *Journal of Risk*. – 2000. – Vol. 2. – Pp. 21–42.
5. Shapiro A. On a Time Consistency Concept in Risk Averse Multistage Stochastic Programming // *Operations Research Letters*. – 2009. – Vol. 37, № 3. – Pp. 143–147.

### Ключевые слова

инвестиционная деятельность, условная стоимость под риском, многоэтапная оптимизация, стохастическое программирование, цифровая экономика.

Горбунков Л.Е.

Университет «Синергия», г. Москва, Россия

ORCID: 0000-0003-2493-6906

### Leonid Gorbunkov

### Keywords

investment activity, conditional value-at-risk, multi-stage optimization, stochastic programming, digital economy.

JEL classification: C61, G11, G32, C15

### Abstract

The article presents a multi-stage optimization model of corporate investment activity using Conditional Value-at-Risk (CVaR) as a coherent risk measure. The model accounts for the dynamic nature of investment decisions, liquidity constraints, and strategic objectives of the enterprise. Numerical experiments on synthetic data, representative of the digital economy, demonstrate a significant increase in expected return compared to the classical Markowitz approach, with controlled tail risk. The results confirm the model's practical applicability for strategic investment planning under uncertainty.