УДК: 336.012.23

1.7. СГЛАЖИВАНИЕ И ПРЕДСКАЗАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ С НЕОПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Проскуряков А.Ю., Ермолаев В.А., Бейлекчи Д.В.,
Муромский институт Владимирского государственного университета

Во многих теоретических и прикладных науках, практически во всех областях человеческой деятельности, в частности, экономической, существует потребность в постановке и решении задач анализа временных рядов и динамических процессов, как правило, с неопределенными параметрами. Целью настоящей работы является рассмотрение двух возникающих при этом задач. А именно, задачи сглаживания временного ряда или процесса, точнее, представления его гладкой, во всех точках временной оси, функцией. Другая задача состоит в анализе результатов моделирования системы предсказания, построенной на основе искусственной нейронной сети и, по сути, относящейся к классу координатно-операторных систем. Полученное методом условной минимизации, решение первой задачи является обобщением известной задачи минимизации на конечном интервале, дополненной условиями гладкого согласования в точках сопряжения различных решений. Приводятся также упрощенные, не оптимальные методы решения этой задачи, а также схематически показаны иные обобщающие подходы. Результатом работы является разработка алгоритма сглаживания данных в классе гладких во всех точках временной оси функций и выводы по моделированию системы предсказания

Введение

Экономика, следует признать, не является в полном смысле замкнутой в себе наукой, завися во многом от множества привносимых извне внешних и внутренних, как правило, неопределенных, факторов, в частности, факторов социального и технологического характера. Проблема, возникающая по причине подобной неопределенности, приводит к необходимости декомпозиции экономической системы на возможно связанные подсистемы (модели), каждая из которых с достаточной точностью описывает соответствующий ей экономический процесс. Задача при этом сводится к определению подходящей структуры и параметров этих частных моделей. Ситуация здесь аналогична ситуации с анализом и предсказанием погоды. Только если в задачах последнего типа хотя бы известны дифференциальные уравнения в частных производных, лежащие в основе физики газовых и жидких сред, то в экономических задачах приходится использовать эвристические, полученные из соображений аналогии, уравнения. Этим обусловлено существование множества различных экономических моделей, часто однотипных, построенных исходя из соображений простоты, но с разным смыслом, вкладываемым в переменные и параметры соответствующих уравнений.

Просмотр литературы по экономике, монографий, учебных пособий и журнальных публикаций, позволяет выделить две звучащие темы: 1) тему статистического апостериорного анализа результатов функционирования и управления экономикой и 2) тему теоретической разработки и исследования математических моделей, адекватно объясняющих, те или иные, наблюдаемые в экономике явления. Тема эта, которой посвящены, в частности, монографии [Интрилигатор, 2002], [Tsay, 2010], является, фактически, является и темой настоящей работы. Здесь следует отметить, что проникновение в сферу экономики цифровых технологий, при всех их потенциальных достоинствах сопровождающееся ростом факторов неопределенности, порождает множество опасностей, требующих принятия специальных мер, в том числе ограничивающего характера. Суть опасностей, обусловленная отсутствием четких правил функционирования цифровой экономики, раскрывается, в частности, в работах [Иванов, 2017], [Ларина, 2020]. Эта сторона темы в настоящей работе детально не затрагивается.

Модели экономики, как и в других областях знаний, делятся на модели стационарные и динамические, представленные соответственно алгебраическими и дифференциальными уравнениями, при выводе которых часто исходят из принципа аналогии с известными фундаментальными законами природы, например термодинамики [Цирлин, 2003], [Цирлин, 2008]. Если математический аппарат моделей первого, стационарного типа составляют, по существу, методы математического программирования, методы анализа временных рядов, линейной и нелинейной регрессии, сглаживания и прогноза [Цирлин, 2008], [Box, 2016], [Montgomery, 2008], [Stulajtor, 2002], [Yong, 2011], [Полунин, 2019], то в аппарате моделей динамического типа существенное место занимают методы теории динамических систем, включая методы теории колебаний и систем оптимального управления. Перечень встречающихся в литературе динамических моделей можно найти в [Сафронов, 2015], [Андрианов и др., 2015].

Конечно, многие, обобщенные по характеру решаемых задач, элементы математического аппарата находят общее применение при построении как стационарных, так и динамических моделей. Такими элементами, например, являются методы линейной регрессии, функционального анализа, оптимизации и др. Так, в основу техники гладкого сглаживания экономических, неограниченных во времени, рядов, могут быть положены методы оптимизации и теории динамических систем. Имеющие самостоятельный интерес, эти методы приложимы, естественно, и к анализу и прогнозированию данных экономического характера, интегрированных, в частности, в характеристики фазовых траекторий соответствующих моделей.

Потенциально значимую роль в экономике играет прогноз. Однако возможности его во многом сильно ограничены, что обусловливается как отсутствием точных сведений об экономических и производственных факторах, факторах конкуренции, промышленной разведки и игр на повышение и понижение, так и множеством социальных факторов. Можно выделить следующие, благоприятные в плане прогнозирования, состояния экономики. Это – 1) прогнозирование стационарных, более-менее установившихся состояний, 2) прогнозирование экономических и финансовых циклов и 3) прогнозирование переходных процессов, возникающих в силу глобальных причин. Задачу прогноза в подобных случаях становится возможным свести к построению динамической системы, моделирующей прогнозируемый процесс. Арсенал используемых при этом моделей, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, сегодня пополнен моделями с распределенными параметрами (моделями в частных производных), и моделями с запаздыванием, что существенно расширяет возможности решения задач. Здесь следует отметить, что названные типы моделей в целом ряде случаев можно отнести к классу координатно-операторных систем [Емельянов и др., 2012], [Емельянов, 2015].

Целями настоящей работы является обсуждение и обобщение некоторых из перечисленных выше методов. Первой такой целью является расширение области определения линейной регрессии до любой требуемой величины, в пределах которой как функция регрессии, так и заданное число ее производных имеют непрерывный характер; это, в свою очередь, решает задачу построения фазового портрета анализируемого временного ряда. Другая цель состоит в построении математической модели, решающей задачу прогнозирования временных рядов и процессов; описании структуры построенной модели с обратной связью в терминах координатно-операторных систем; моделировании неизвестной модели нестационарного процесса с помощью обучаемой искусственной нейронной сети. Приводятся сведения о полученных результатах сглаживания и предсказания.

1. Итерационный алгоритм сглаживания временных рядов

Классические методы линейной регрессии, как известно, решают задачу восстановления (сглаживания) непрерывного процесса лишь на конечном отрезке временного ряда; восстановление же процесса на последовательности отрезков требует в точках сопряжения последних соответствующей гладкой согласованности решений.

Рассмотрим последовательности отрезков

$$\Theta_k = [(k-1)T, kT], k = 1, 2, \dots,$$
$$\Omega_k = [-\upsilon^- + (k-1)T, kT + \upsilon^+], k = 1, 2, \dots,$$

где $\upsilon^- > 0$ и $\upsilon^+ > 0$. При этом Θ_k определяет k отрезок сглаживания данных, а Ω_k – отрезок данных, по которым осуществляется предварительное сглаживание или фильтрация временного ряда на отрезке $\Theta_k \subset \Omega_k$. Функции на этих отрезках обозначаются соответственно как

$$\mathrm{u}_k(\tau) = \mathrm{u}(\tau \in \Theta_k) \text{ и}$$
$$\mathrm{w}_k(\tau) = \mathrm{u}(\tau \in \Omega_k).$$

Введем систему линейно независимых функций $\{f_l(t)\}_1^n$ и положим, что

$$\mathrm{w}_k(\tau) \cong \sum_{l=1}^n a_{k,l} f_l(\tau) = a_k^T \varphi(\tau), \quad (1)$$

где $a_k^T = (a_{k,1}, a_{k,2}, \dots, a_{k,n})$, а $\varphi(\tau) = (f_1(\tau), f_2(\tau), \dots, f_n(\tau))$ – вектор коэффициентов разложения наблюдаемых данных по системе базисных функций или базису. Здесь и везде ниже верхний символ T означает операцию транспонирования.

Функционал ошибки разложения (1) на отрезке Ω_k дается выражением

$$G_k(a_k) = \frac{1}{2} \int_{a_k} (a_k^T \varphi(\tau) - \mathrm{w}_k(\tau))^2 \mathrm{d}\sigma(\tau),$$

где интеграл понимается в смысле Стилтьеса. Коэффициенты многочлена (1) находятся посредством безусловной минимизации функционала

$$G_k(a_k) \to \min_{a_k},$$

то есть методом наименьших квадратов в рамках линейной регрессии, а не фильтрации. Решение этой задачи обозначим как $\hat{a}_k = \arg\min_{a_k} G_k(a_k)$, так что имеет место выражение

$$\mathrm{w}_k(\tau) = \hat{a}_k^T \varphi(\tau).$$

Разлагая функцию $\mathrm{u}_k(\tau) = \mathrm{w}_k(\tau \in \Theta_k) = \hat{a}_k^T \varphi(\tau \in \Theta_k)$ в окрестности точки $\tau = 0$ в ряд Тейлора получаем

$$\hat{u}_k(h) \cong u_k(0) + u_k^{(1)}(0)h + \frac{1}{2!} u_k^{(2)}(0)h^2 + \frac{1}{3!} u_k^{(3)}(0)h^3 + \dots + \frac{1}{r!} u_k^{(r)}(0)h^r,$$

или, если принять, что $\frac{1}{j!} u_k^{(j)}(0) = x_k^{(j)}(0)$, то

$$\hat{u}_k(h) \cong x_k(0) + x_k^{(1)}(0)h + x_k^{(2)}(0)h^2 + x_k^{(3)}(0)h^3 + \cdots + x_k^{(r)}(0)h^r = \mathbf{x}_k^T(0)\boldsymbol{\omega}(\tau)$$

где

$$\mathrm{x}_k^T(0) = (x_k(0), x_k^{(1)}(0), x_k^{(2)}(0), \dots, x_k^{(r)}(0)) \text{ и } \omega^T(\tau) = (1, \tau, \tau^2, \dots, \tau^r). \quad (2)$$

Вектор производных коэффициентов $x_k(0) \equiv c_k$ находится из условия минимума функционала

$$J_k(c_k) = \frac{1}{2}\int_{\Theta_k} \left(c_k^T \omega(\tau) - \mathrm{u}_k(\tau)\right)^2 \mathrm{d}\sigma(\tau) + \varepsilon \frac{1}{2} c_k^T Q_k c_k, \quad (3)$$

где ε и Q_k – соответственно параметр и матрица регуляризации.

Вектор c_k и безусловный минимум функционала находятся при этом из уравнения

$$\nabla_{c_k} J_k(c_k) = \left(\int_{\Theta_k} \omega(\tau)\omega^T(\tau)\mathrm{d}\sigma(\tau) + \varepsilon Q_k\right) c_k - \int_{\Theta_k} \omega(\tau)\mathrm{u}_k(\tau)\mathrm{d}\sigma(\tau) = 0. \quad (4)$$

Чтобы обеспечить в точках $(k-1)T$ гладкое сопряжение решений, полученных на отрезках Θ_k и Θ_{k-1}, функционал (3) следует дополнить условиями, учитывающими, в общем случае случайные, ошибки $\xi_k(t)$, обусловленные характером используемого алгоритма. Данные условия можно представить функциями

$$c_k^T \omega^{(j)}(0) - c_{k-1}^T \omega^{(j)}(T) - \xi_{k,j}(0) + \xi_{k-1,j}(T) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, r, \quad (5)$$

что придает задаче характер условной оптимизации, а не безусловной, решение которой дается уравнением (4).

Если, учитывая (2) и (5), ввести матрицу [Брубейкер и др., 1975]

$$\Xi(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 & \cdots & t^r \\ 0 & 1 & 2t & \cdots & rt^{r-1} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & r(r-1)t^{r-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

с компонентами $\Xi_{i,j}(t) = \begin{cases} \frac{j!}{i!(j-i)!} r^{j-i}, 0 \le i \le r, i \le j \le r \\ 0, j < i \end{cases}$ то приведенные выше условия – ограничения типа равенства – можно записать в виде

$$\Xi(0)c_k - \Xi(T)c_{k-1} - \xi_k(0) + \xi_{k-1}(T) = 0.$$

Если учесть, что $\Xi(0) = \mathrm{I}$ – единичная матрица, то ограничение принимает вид

$$c_k - \Xi(T)c_{k-1} - \xi_k(0) + \xi_{k-1}(T) = 0. \quad (7)$$

При этом в соответствии с (2) восстановленный процесс и его производные на отрезке Θ_k определяются выражением

$$\mathrm{x}_k(t) = \Xi(t)c_k + \xi_k(t), \quad (8)$$

или, если ввести вектор $\hat{u}_k^T(t) = (\hat{u}_k(t), \hat{u}_k^{(1)}(t), \dots, \hat{u}_k^{(r)}(t))$ и матрицу

$$\Lambda = \mathrm{diag}(1, 1, 1/2!, \dots, 1/r!),\ \hat{u}_k(t) = \Lambda^{-1}\Xi(t)c_k + \xi_k(t).$$

Здесь принято во внимание, что $x_k^{(j)}(t) = u_k^{(j)}(t)/j!$.

Из анализа поставленной задачи (2) – (8) следует, что помимо процедур предварительного сглаживания (фильтрации) и полиномиальной аппроксимации, задача нахождения последовательности оптимальных векторов c_k требует обращения к методам условной оптимизации, например, к методу множителей Лагранжа, представленного стандартным выражением

$$L_k(c_k) = \frac{1}{2}\int_{\Theta_k} \left(c_k^T \omega(\tau) + \xi_{k,1}^T(t) - \mathrm{u}_k(\tau)\right)^2 \mathrm{d}\sigma(\tau) + \varepsilon \frac{1}{2} c_k^T Q_k c_k + \lambda_k^T (c_k - d_k), \quad (9)$$

где $d_k = \Xi(T)c_{k-1} + \eta_k = b_k + \eta_k$, $\eta_k = \xi_k(0) - \xi_k(T) = 0$ и λ_k – вектор множителей Лагранжа.

Отсюда, с учетом (4), градиент функции Лагранжа по вектору искомых параметров (7)

$$\nabla_{c_k} L_k(c_k) = \left(\int_{\Theta_k} \omega(\tau)\omega^T(\tau)\mathrm{d}\sigma(\tau) + \varepsilon Q_k\right) c_k - \int_{\Theta_k} \omega(\tau)\left[\mathrm{u}_k(\tau) - \xi_{k,1}(t)\right]\mathrm{d}\sigma(\tau)\Big) + \lambda_k = 0 \quad (10)$$

При этом если ввести матрицу $F_k = \int_{\Theta_k} \omega(\tau)\omega^T(\tau)\mathrm{d}\sigma(\tau) + \varepsilon Q_k$, то из уравнения (10) следует выражение, определяющее искомый вектор

$$c_k = F_k^{-1}\left(\int_{\Theta_k} \omega(\tau)\left[\mathrm{u}_k(\tau) - \xi_{k,1}(t)\right]\mathrm{d}\sigma(\tau)\Big) - \lambda_k\right).$$

В силу положительной определенности матрицы F_k минимум функции (9) достигается при любом λ_kв точке $c_k = d_k$, если положить

$$\lambda_k = \int_{\Theta_k} \omega(\tau)\xi_{k,1}(t)\mathrm{d}\sigma(\tau) \text{ и } \eta_k = 0.$$

При этом

$$c_k = F_k^{-1}\int_{\Theta_k} \omega(\tau)\mathrm{u}_k(\tau)\,\mathrm{d}\sigma(\tau) \text{ и}$$

$$L_k(c_k) = \frac{1}{2}\int_{\Theta_k} \left(c_k^T \omega(\tau) - \mathrm{u}_k(\tau)\right)^2 \mathrm{d}\sigma(\tau) + \varepsilon \frac{1}{2} c_k^T Q_k c_k.$$

Отсюда и из условия $\nabla_{\lambda_k} L_k(\lambda_k) = 0$, наложенного на функционал (9), собственно, и следует приведенное выше выражение.

Относительно надежности представленной модели сглаживания многое зависит от характера и результатов предварительной обработки или фильтрации исходных данных; от характера, влияющего на величину, в общем, случайную, скачков в узлах сопрягаемых решений η_k и погрешность восстановления $\xi_k(t)$ в целом. При достаточной гладкости исходных данных этими погрешностями можно, в принципе, и пренебречь.

Следует отметить, что, устранение скачков в узлах сопряжения, то есть обеспечение гладкого сопряжения можно решить и в иной, возможно и в не оптимальной, форме; а именно, способом, опирающимся на равенство $\Xi(0) = \mathrm{I}$, способом компенсации ошибки в узлах сопряжения $k-1-$ и $k-$ отрезков. Процедура компенсации осуществляется по формуле $\hat{x}_k(t) = \Xi(t)c_k - e_k$, где предполагаемая известной ошибка $e_k = c_k - \Xi(T)c_{k-1}$. Более обще, $\hat{x}_k(t) = \Xi(t)c_k - \rho(t)e_k$, где $\rho(t)$ – монотонно убывающая на отрезке $[0, T]$ неотрицательная функция, принимающая в точке $t = 0$ значение $\rho(0) = 1$ и гарантирующая, тем самым, выполнение условий гладкого сопряжения (5). Такими свойствами обладают, например, функции $\rho_1(t) = 1 - t/T$ и $\rho_2(t) = e^{-\omega/T}$. Векторы c_k могут при этом находиться в ходе решения задачи безусловной минимизации (4).

2. О проблемах предсказания временных рядов

Рассмотренный выше алгоритм кусочно-гладкого сглаживания временных рядов, названный по способу согласования решений в точках сопряжения отвечающих им отрезков данных итерационным, устанавливает, фактически, связь временного ряда с некоторой динамической системой, которая, в общем случае, относится к классу систем с переменной структурой. Наличие такой связи расширяет аппарат анализа временных рядов методами теории динамических систем, наглядными методами анализа фазовых портретов и траекторий, используемыми в самых разных областях науки и практики (включая экономику, для которой характерно наличие разного рода экономических и финансовых циклов [Матросов, Шалфеев, 2021]). Подобный анализ приложим также и к процессам, связанным с экономикой [Цирлин, 2008], [Красовский, Тарасьев, 2009], [Полунин, 2019], [Губанов и др., 2020], [Бреер, 2020]. Это, в первую очередь, информационные и социальные процессы: процессы согласования мнений (достижения консенсуса); кластеризации и поляризации мнений; результаты навязывания и борьбы с навязыванием мнений; процессы формирования матриц доверия, активности и подверженности влиянию; процессы экономического роста [Матросов, Шалфеев, 2021] и др. Следует отметить, что играющий значимую роль анализ подобных процессов, не простой даже в обычных условиях, заметно осложняется с переходом к цифровым технологиям [Иванов, 2017]. [Ларина, 2020], [Добронец, Попова, 2020].

При всех возможностях, предоставляемых регрессионными и иными известными методами анализа временных рядов [Интрилигатор, 2002], [Цирлин, 2008], [Tsay, 2010], [Полунин, 2019], остаются открытыми многие, требующими своего решения, вопросы прогнозирования процессов с неопределенными параметрами, а именно вопросы достижимости требуемых значений точности и величины горизонта предсказания [Кравцов, 1989], [Кравцов, 1997]. К сожалению, получение ответа на эти вопросы осложнено влиянием множества неопределенных, взаимно коррелированных информационных и социальных факторов, определяющих суммарное поведение всей совокупности агентов экономической системы. В этих условиях не следует, в частности, надеяться на получение методами регрессионного анализа сколько-нибудь значимой величины горизонта надежного предсказания. Причина этого, как правило, заключена в невозможности реализации реальной структуры формирователя предсказываемого процесса в классе систем регрессионного типа. В принципе, конечно, решение этой проблемы требует построения соответствующей модели формирователя, нахождение структуры и параметров которой составляет содержание задачи идентификации.

К сожалению, в условиях неопределенной, постоянно изменяющейся во времени динамики временных рядов, характерных для процессов экономики, требуется постоянная, в реальном масштабе времени, коррекция модели наблюдаемого процесса, по терминологии С. В. Емельянова – требуется построение координатно-операторной модели с переменной структурой. Применение техники искусственных нейронных сетей позволяет унифицировать структуру модели и отчасти снимает проблему идентификации. Однако неясными здесь остаются вопросы отображения параметров моделей и их начальных условий в пространство состояний сети, что требует более глубокого обсуждения вопросов обучения последней.

Структура такой модели приведена на рис. 1. Выходной слой нейронной сети, моделирующей динамику прогнозируемого процесса, представлен на этом рисунке десятью нейронами, т.е., на каждом шаге прогноза, числом $n = 10$ искомых будущих значений процесса, которое, конечно, может быть и иным. При этом, поскольку в процессе моделирования на каждый шаг обучения приходилось до десяти шагов прогноза, то горизонт предсказания достигал величины порядка 100, а в ряде случаев и более. Размер же сенсорного слоя двух- и трехслойной сети, представленный числом N, в процессе моделирования варьировался в пределах от 50 до 300.

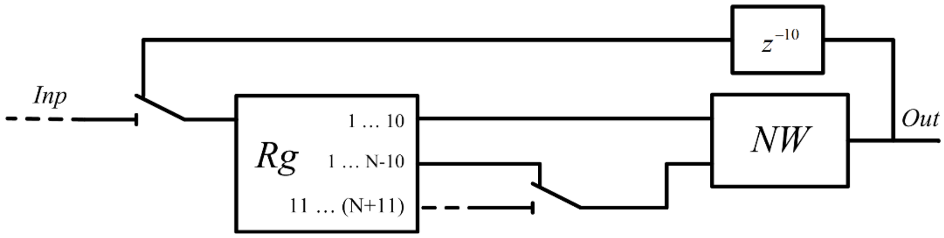

Рис. 1. Модель предсказания. Сплошными линиями показаны положения переключателей в режиме предсказания, а штриховыми – в режиме обучения: сдвиговый регистр, нейронная сеть

В ходе моделирования была установлена зависимость горизонта предсказания от размеров сенсорного слоя нейронной сети и точности идентификации начальных значений процесса в момент перехода модели в режим предсказания, что нашло выражение в рекомендациях на размер сенсорного слоя и момент завершения процедуры обучения.

По этим рекомендациям, во-первых, требуется, чтобы в пределах каждого окна данных сенсорного слоя были представлены все характерные особенности динамики наблюдаемого процесса и, во-вторых, состояние сети в момент завершения процедуры обучения должно быть согласовано с состоянием сети в момент перехода в режим предсказания.

Здесь следует отметить, что в процессе обучения сети, а именно, сети прямого распространения, использовался алгоритм обратного распространения ошибки.

Заключение

Во многих областях деятельности человека и, в частности, в области экономики, существует потребность представления временных рядов и процессов гладкими, на неограниченной временной оси, функциями и обеспечения требуемого горизонта предсказания наблюдаемых данных. Решение задачи гладкого представления временного ряда находится методом условной оптимизации, который в известном смысле обобщает известный алгоритм сглаживания данных на конечном интервале введением условий гладкого сопряжения. Показано пространство решений, удовлетворяющих условиям гладкого сопряжения, но не оптимальных по своей сути.

Гладкое представление наблюдаемых данных с неопределенными параметрами диктуется во многом потребностями их анализа, анализа динамики процессов по характеру (форме) их фазовых портретов и траекторий, выявления разного рода корреляций и экстремумов. Конечно, результаты такого анализа существенно зависят от параметров алгоритма, в первую очередь временных, выбираемых исходя из поставленной цели.

Следует отметить, что рассмотренный в работе алгоритм, основанный на полиномиальной аппроксимации, можно обобщить, если принять, что, например, $\Xi(t)$ –это переходная матрица некоторой линейной системы в переменных состояния, которая по своему определению удовлетворяет условию $\Xi(0) = \mathrm{I}$. При этом, например, задачу аппроксимации можно представить эквивалентной задачей управления

$$z_k(t) = \Xi(t) z_{k-1}(T) + \int_0^t \Xi(t-\tau)\zeta_k(\tau)\mathrm{d}\sigma(\tau)\,,$$

где $\zeta_k(\tau)$ – вектор управляющих воздействий.

Приведенная на рис. 1 модель предсказания, основу которой составляет искусственная нейронная сеть, относится, в принципе, к классу координатно-операторных систем [Емельянов и др., 2012], [Емельянов, 2015] – систем, функционирующих в двух режимах: режиме обучения и режиме предсказания. Переключение режимов обеспечивается действием оператора выбора. Целью моделирования было исследование процедур обучения нейронной сети при разных размерах сенсорного и скрытых слоев, процедур и возможностей организации циклического режима предсказания. Так, было показано, что требуемая надежность предсказания достигается только при условии, что все особенности динамики наблюдаемого процесса присутствуют в пределах окна сенсорных данных, а процедура обучения завершается строго перед началом нового цикла предсказания. Выбор такой, основанной на нейронной сети модели был обусловлен отсутствием априорной информации о формировании наблюдаемого процесса.

Литература

1. Андрианов Д. Л., Арбузов В. О., Ивлиев С. В., Максимов В. П., Симонов П. М. Динамические модели экономики: теория, приложения, программная реализация // Вестник Пермского университета. Экономика, 2015, вып. 4 (27), с. 8-32.
2. Бреер В. В. Теоретико-игровая пороговая модель биржевого рынка // Проблемы управления, 2020, № 3, с. 34-39.
3. Брубейкер Т. А., Корнетт Ф. Н., Помернаки С. Л. Использование методов линейной цифровой фильтрации для автоматизации лабораторных исследований // ТИИЭР, 1975, т. 63, № 10, с. 122-134.

4. Губанов Д. А., Петров И. В., Чхартишвили А. Г. Многомерная модель динамики мнений в социальных сетях: индексы поляризаций // Проблемы управления, 2020, № 3, с. 26-33.
5. Добронец Б. С., Попова О. А. Вычислительные аспекты цифровой экономики // УБС, 2020, вып. 84, с. 114-129.
6. Емельянов С. В., Фурсов А. С. Координатно-операторная обратная связь. Свойства. Особенности. Перспективы // АиТ, 2015, № 10, с. 3-39.
7. Емельянов С. В., Фомичев В. В., Фурсов А. С. Одновременная стабилизация линейных динамических объектов регулятором переменной структуры // АиТ, 2012, № 7, с. 15-24.
8. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономичекая теория. – М.: Айрис-Пресс, 2002.
9. Иванов В. В., Малинецкий Г. Г. Цифровая экономика: мифы, реальность, перспектива. – М.: РАН, 2017.
10. Кравцов Ю. А. Случайность, детерминированность, предсказуемость // УФН, 1989, т. 158, вып. 1, с. 93-122.
11. Красовский А. А., Тарасьев А. М. Построение нелинейных регуляторов в моделях экономического роста // Труды ИММ УрО РАН, 2009, т. 15, № 3, с. 127-138.
12. Ларина О. И., Акимов О. М. Цифровые деньги на современном этапе: ключевые риски и направления развития // Финансы: теория и практика, 2020, т. 24, № 4, с. 18-30.
13. Матросов В. В., Шалфеев В. Д. Моделирование экономических и финансовых циклов: генерация и синхронизация // Известия вузов ПНД, 2021, т. 29, № 4, с. 515-537.
14. Полунин Ю. А. Синтез методов нелинейной динамики и регрессионного анализа для исследования социально-экономических процессов // Проблемы управления, 2019, с. 32-44.
15. Пределы предсказуемости. / Под ред. Ю. А. Кравцова. – М.: ЦентрКом, 1997.
16. Сафронов А. С. Моделирование инновационного роста. – Самара: Изд-во СГАУ, 2015.
17. Цирлин А. М. Задачи и методы усредненной оптимизации // Труды МИАН, 2008, т. 261, с. 276-292.
18. Цирлин А. М. Методы оптимизации в необратимой термодинамике и микроэкономике. – М.: Физматлит, 2003.
19. Box G. E. P., Jenkins G. M., Reinsel G. C., Ljuing G. M. Time series analysis. Forecasting and control. – Hoboken New Jersey: John Wiley & Sons, 2016.
20. Montgomery D.C., Jennings C.L., Kulahei M. Introduction to time series analysis and forecasting // Hoboken New Jersey: John Wiley & Sons, 2008.
21. Stulajtor P, Predictions in time series using regression models. – New York: Springer, 2002.
22. Tsay R. S. Analysis of financial time series. – Hoboken New Jersey: John Wiley & Sons, 2010.
23. Yong P. L. Recursive estimation and time-series analysis. – Heidelberg Berlin: Springer, 2011.

References in Cyrillics

1. Andrianov D. L., Arbuzov V. O., Ivliev S. V., Maksimov V. P., Simonov P. M. Dynamic models of economics: theory, applications, software implementation // Proceedings of Perm University. Economics, 2015, ser. 4 (27), pp. 8-32.
2. Breer V. V. Theoretical-game threshold model of the stock market // Problems of Management, 2020, № 3, pp. 34-39.
3. Brubeiker T. A., Kornett F. N., Pomernaki S. L. Using linear digital filtering methods to automate laboratory studies // TIIER, 1975, vol. 63, #10, pp. 122-134.
4. Gubanov D. A., Petrov I. V., Chkhartishvili A. G. Multivariate model of opinion dynamics in social networks: Polarization Indices // Problems of Management, 2020, #3, pp. 26-33.
5. Dobronets B. S., Popova O. A. Computational aspects of the digital economy // UBS, 2020, ser. 84, pp. 114-129.
6. Emel'yanov S. V., Fursov A. S. Coordinate-operator feedback. Properties. Features. Prospects // AIT, 2015, #10, pp. 3-39.
7. Emel'yanov S. V., Fomichev V. V., Fursov A. S. Simultaneous stabilization of linear dynamic objects by a controller of variable structure // AIT, 2012, #7, pp. 15-24.
8. Intriligator M. Mathematical methods of optimization and economic theory. – Moscow: AirisPress, 2002
9. Ivanov V. V., Малинецкий Г. Г. Digital Economy: Myths, Reality, Perspective. – Moscow: Russian Academy of Sciences, 2017.
10. Kravtsov YU. A. Randomness, determinacy, predictability // UFN, 1989, vol. 158, ser. 1, pp. 93-122.
11. Krasovskii A. A., Taras'ev A. M. Construction of nonlinear regulators in economic growth models // Proceedings of IMM UrO RAS, 2009, т. 15, #3, pp. 127-138.

12. Larina O. I., Акимов О. М. Digital money at the present stage: key risks and directions of development // Finance: Theory and Practice, 2020, vol. 24, #4, pp. 18-30.
13. Matrosov V. V., Shalfeev V. D. Modeling economic and financial cycles: generation and synchronization // Proceedings of PND, 2021, vol. 29, #4, pp. 515-537.
14. Polunin YU. A. Synthesis of nonlinear dynamics and regression analysis methods for the study of socio-economic processes // Problems of Management, 2019, pp. 32-44.
15. The limits of predictability. / Red. YU. A. Kravtsova. – Moscow: CentrKOM, 1997.
16. Safronov A. S. Modeling of innovative growth. – Samara: SGAU, 2015.
17. Tsirlin A. M., Problems and methods of averaged optimization // Proceedings of MIAN, 2008, vol. 261, pp. 276-292.
18. Tsirlin A. M., Optimization methods in irreversible thermodynamics and microeconomics. – Moscow: Fizmatlit, 2003.

Проскуряков Александр Юрьевич, к.т.н., доцент МИ ВлГУ,
kaf-eivt@yandex.ru
Ермолаев Валерий Андреевич, к.т.н., доцент МИ ВлГУ,
kaf-eivt@yandex.ru
Бейлекчи Дмитрий Владимирович, к.т.н., преподаватель МИ ВлГУ,
kaf-eivt@yandex.ru

Ключевые слова
Сглаживание временных рядов, гладкая функция, условная минимизация, цифровая экономика, нейросетевая модель предсказания.

Alexander Proskuryakov, Valery Ermolaev, Dmitry Beylekchi Smoothing and prediction of economic processes with uncertain parameters

Keywords
Time series smoothing, smooth function, conditional minimization, digital economy, neural network prediction model.

DOI: 10.34706/DE-2023-02-07
JEL classification C53 – Методы прогнозирования • методы моделирования

Abstract
In many theoretical and applied sciences, practically in all areas of human activity, particularly in economics, there is a need for setting and solving problems of analyzing time series and dynamic processes, as a rule, with uncertain parameters. The purpose of this work is to consider two problems arising in this case. Namely, the problem of smoothing a time series or a process, more precisely, of representing it as a smooth function at all points of the time axis. Another task is to analyze the results of modeling a prediction system based on an artificial neural network and, in fact, belonging to the class of coordinate-operator systems. The solution of the first problem obtained by conditional minimization method is a generalization of the well-known minimization problem on a finite interval augmented by smooth matching conditions at conjugation points of different solutions. Simplified, non-optimal methods for solving this problem are also given, and other generalizing approaches are schematically shown. The result is the development of an algorithm for data smoothing in a class of functions smooth at all points of the time axis and conclusions on the modeling of the prediction system.